JUN 20 1924

# Physikalische Zeitschrift

begründet von **E. Riecke** und **H. Th. Simon**

vereinigt mit dem

## Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von **Johannes Stark**

**Herausgeber:**

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Goldmark 11.— postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.— vierteljährlich. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Goldmark —.20, Beilagen mit Goldmark 60.— berechnet.

**Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den**

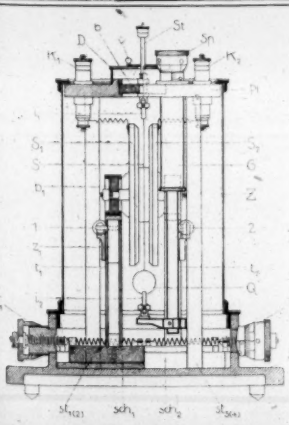
Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 9. Leipzig, 1. Mai 1924. 25. Jahrgang.

No. 661. Printed in Germany.

**Phys.-mech. Institut von Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn,**

**München.**



## Saiten-Elektrometer

**nach Lutz-Edelmann (neue Form).**

C. W. Lutz, Physik. Zeitschrift, 24. Jahrgang. 1923. Seite 166—170.

Katalog 30, Spezialliste No. 32 über Saitengalvanometer und Registrierapparate, Spezialliste No. 31 über einfache Präzisionsschulapparate gratis und franko.

**Zu verkaufen:**

**Annalen der Physik, Bände 28–63 (1909 bis 1920),**
**Beiblätter zu den Annalen der Physik 1915—1917,**
**Berichte der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (und Literaturverzeichnis) 1912—1919,**
**Physikalische Zeitschrift 1910—1920,**
**Zeitschrift für Physik, Bände 1—6.**

Die Bände bis 1915 sind schön gebunden. Angebote unter **S. H. 630** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2, erbeten.

S. HIRZEL IN LEIPZIG

**W. Moede**
**Experimentelle Massenpsychologie**
Mit 16 Abb. 8°. (VI u. 239 S.) 1920.
Geh. G.-M. 4.—, $ —.95, geb. G.-M. 5.—, $ 1.20.

Der Betriebsleiter, der mit Arbeitermassen oder -gruppen zu tun hat, jeder, der Wirkungen auf die Massen auslösen will, alle werden in diesem Neuland von den Bäumen Früchte der Erkenntnis pflücken, die ihr geistiges Rüstzeug schärfen. Moede baut auf selbst erkanntem und versuchtem Tatsachenmaterial auf. Phantasieschlüsse sind ihm fremd. Und gerade deshalb ist seine Arbeit wertvoll. (Ingenieur-Zeitung.)

*Bibliothek wird fortgesetzt.*

**Carl Schleicher & Schüll**
**Düren, Rheinland**

empfehlen

**Millimeter-Zeichen- u. Pause-Papiere in Rollen, Bogen u. Blocks in unübertroffener Herstellung.**
**Koordinaten, Logarithmen-, Sinus- u. Windrosenpapiere.**
**Blätter für Registrierapparate aller Art.**
**Allerbeste:** Zeichen-, Pause-, durchsichtige Entwurf-Papiere, Pauseleinwand.

*Muster auf Anfrage kostenlos.*

**Einbanddecken** zur Physikalischen Zeitschrift 1923 sind vorrätig und können zum Preise von G.-M. 5.— durch jede Buchhandlung oder vom Verlag S. Hirzel in Leipzig, Königstr. 2 bezogen werden.

*Kugeloptikop. D.R.P. 250314.*

**Franz Schmidt & Haensch**
**Berlin S. 42,** Prinzessinnenstraße 16

**Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.**

**Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.**

Preislisten kostenlos.

# PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

No. 9. 1. Mai 1924. Redaktionsschluß für No. 11 am 10. Mai 1924. 25. Jahrgang.


INHALT:


**Originalmitteilungen:**

K. Lichtenecker, Der elektrische Leitungswiderstand künstlicher und natürlicher Aggregate. (Fortsetzung.) S. 193.

E. Hückel, Die Kataphorese der Kugel. S. 204.

H. Winter-Günther u. J. Zenneck, Über Spulen mit veränderlicher Selbstinduktion für Mittelfrequenz. S. 210.

A. Wigand u. K. Genthe, Zur Präzisierung der Sichtmessung. S. 212.

H. Müller, Die Zerreißfestigkeit des Steinsalzes. S. 223.

**Besprechungen:**

S. Valentiner, Vektoranalysis. S. 224.

**Personalien.** S. 224.


## ORIGINALMITTEILUNGEN.

### Der elektrische Leitungswiderstand künstlicher und natürlicher Aggregate.


Von Karl Lichtenecker.


(Fortsetzung.)

#### Einfluß der Anordnung der „Bausteine" in der Ebene (Gitteranordnung).

Bisher war in allen behandelten Fällen — quadratische, kreisförmige und elliptische Gestalt der eingesprengten Partikel und verschiedene Lage derselben bezüglich der Stromrichtung — übereinstimmend ein quadratisches Flächengitter für die Anordnung der das Aggregat aufbauenden Teilchen in der Ebene des flächenhaften Leiters zugrunde gelegt.

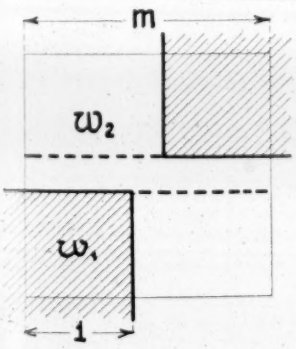



Fig. 9.

Es war nun die Frage des Einflusses der Gitteranordnung ceteris paribus auf den Aggregatwiderstand zu untersuchen und zu diesem Ende mindestens noch für eine weitere ebene Gitterstruktur die Reihe der vorausgehenden Untersuchungen zu übertragen. Gewählt wurde als die zunächst liegende die punktiert quadratische Gitterstruktur. Die Rechnungen, die sich unter der Annahme einer solchen Anordnung der „Bausteine" ergeben, sind etwas verwickelter als die für das einfach quadratische Gitter, sollen aber im Folgenden im Hinblick auf die Analogie der vorausgehenden Ableitungen gekürzte Darstellung finden.

Gestalt der Teilchen quadratisch; eine Quadratseite der Stromrichtung parallel.

Das Elementargebiet der Anordnung hat in diesem Falle die durch Fig. 9 gekennzeichnete Gestalt.

Durch Zerlegung in drei Teilgebiete parallel zur Stromrichtung, gemäß Fig. 9, erhält man als obere Schranke des Gesamtwiderstandes

$$W_0 = \frac{1}{\frac{2}{w_1 + (m-1)w_2} + \frac{m-2}{m w_2}}$$

und durch analoge Zerlegung normal zur Stromrichtung im Sinne der Fig. 10 als untere Schranke

$$W_u = w_1 w_2 \cdot \left( \frac{2}{w_2 + (m-1)w_1} + \frac{m-2}{m w_1} \right)$$

Die so errechneten Werte vereinigt die Tabelle VI; daß größere Raumanteile als $v = 50$ Proz. bei dieser Gitterstruktur nicht auftreten können, ergibt sich von selbst; daher fallen die betreffenden Werte in der Tabelle, die größeren Anteilen für den eingesprengten Bestandteil entsprechen würden, aus.

Gestalt der Teilchen quadratisch; Quadratseiten gegen die Stromrichtung um 45 Proz. geneigt.

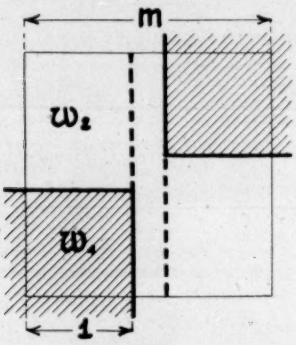



Fig. 10.

Es ist, wie aus Fig. 11 hervorgeht, zur Berechnung der oberen Schranke

$$dw = \frac{w_1 x + w_2(m-x)}{dy},$$

$$dA = \frac{1}{dw} = \frac{dy}{w_1 x + w_2(m-x)}.$$

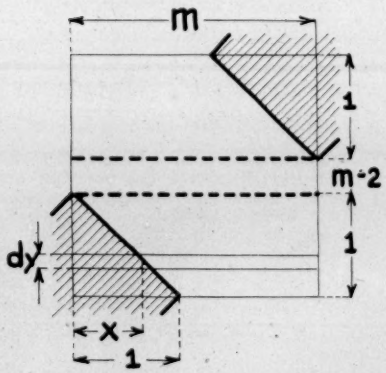



Fig. 11.

Die Summation zerfällt ersichtlich in drei Teile; die Gesamtleitfähigkeit $A$ ist, falls $m > 2$ angenommen wird

$$A = 2\int_0^1 \frac{dx}{x(w_1 - w_2) + m w_2} + \frac{m-2}{m}\cdot\frac{1}{w_2} =$$

$$= \frac{2}{w_1 - w_2} \lg \frac{w_1 + (m-1)w_2}{m w_2} + \frac{m-2}{m w_2}.$$

Ist dagegen $m < 2$, entsprechend Fig. 12, so ergibt sich für den Schrankenwert der Gesamtleitfähigkeit der Ansatz

$$A = 2\int_{x=1}^{x=2-m} \frac{dx}{x(w_1 - w_2) + m w_2} +$$

$$+ \frac{(2-m)}{(2-m)w_1 + (2m-2)w_2}$$

und, nach Umformung

$$A = \frac{2}{w_1 - w_2} \cdot \lg \frac{w_1 + (m-1)w_2}{(2-m)w_1 + (2m-2)w_2} +$$

$$+ \frac{2-m}{(2-m)w_1 + (2m-2)w_2}.$$

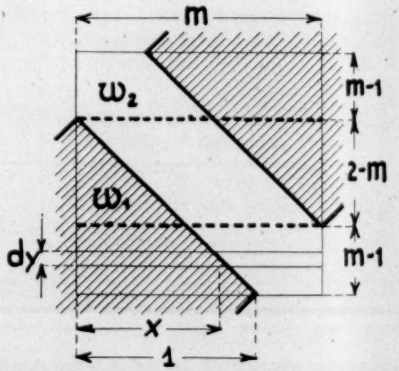



Fig. 12.

Der gesuchte obere Schrankenwert $W_0$ ist das Reziprokum des ermittelten Leitfähigkeitswertes.

$$W_0 = \frac{1}{A}.$$

Als untere Schranke des spezifischen Widerstandes des Aggregates $W_u$ erhält man in ähnlicher Weise, jedoch durch Zerlegung in infinitesimale Streifen quer zur Stromrichtung für

$m > 2$

$$W_u = \frac{2 w_1 w_2}{w_2 - w_1} \lg \frac{w_2 + (m-1)w_1}{m w_1} +$$

$$+ \frac{m-2}{m} w_2$$

$m < 2$

$$W_u = w_1 w_2 \cdot$$

$$\left[\frac{2}{w_2 - w_1} \lg \frac{w_2 + (m-1)w_1}{(2-m)w_2 + (2m-2)w_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{2-m}{(2-m)w_2 + (2m-2)w_1}\right].$$

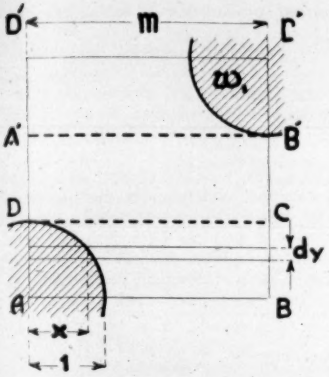



Fig. 13.

Die numerischen Werte von $W_0$ und $W_u$ für diesen Fall sind zusammengestellt in Tabelle VII.

Gestalt der Teilchen kreisförmig.

Das Elementargebiet eines Aggregates mit kreisförmigen Einschlüssen in punktiert quadratischer Gitteranordnung ist gekennzeichnet durch Fig. 13. Für die Auswertung des Aggregatwiderstandes sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $m > 2$ (Fig. 13).

In diesem Falle ist die Berechnung derjenigen bei nichtpunktierter Gitteranordnung vollkommen analog; statt in zwei, zerfällt die Integration in drei Gebiete. Man erhält für die obere Widerstandsgrenze:

Leitfähigkeit des Gebietes $ABCD$

$$\lambda_1 = \frac{1}{w_1 - w_2} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{1 - 1/a^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\right].$$

Leitfähigkeit des Gebietes $CDA'B'$

$$\lambda_2 = \frac{1}{w_2} \cdot \frac{m-2}{m}.$$

Leitfähigkeit des Gebietes $A'B'C'D'$

$$\lambda_3 = \lambda_1,$$

wobei der Kürze wegen

$$\frac{m w_2}{w_1 - w_2} = a$$

gesetzt ist.

Somit ergibt sich als obere Schranke des spezifischen Widerstandes des Aggregates:

$$W_0 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{1}{\frac{2}{w_1 - w_2} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{1 - 1/a^2}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\right] + \frac{m-2}{w_2 m}}.$$

Analog findet man für die untere Schranke:

$$W_u = \frac{2 w_1 w_2}{w_2 - w_1} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{1 - 1/a^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} + \frac{1}{w_1} \cdot \frac{m-2}{m}\right]$$

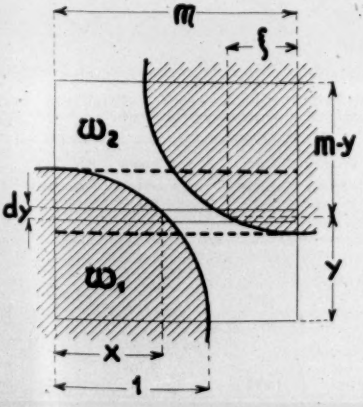



Fig. 14.

wobei $a$ die gleiche Bedeutung hat wie in dem Ausdrucke für die obere Schranke.

b) $m < 2$ (Fig. 14).

Für den Widerstand eines Streifens von der Breite $dy$ in der Stromrichtung ergibt sich in diesem Falle der Ausdruck:

$$dw = \frac{w_1(x+\xi) + w_2(m-x-\xi)}{dy}$$

wobei

$$x = \sqrt{1 - y^2}$$

und

$$\xi = \sqrt{1 - (m-y)^2}$$

und für die Leitfähigkeit eines Streifens von der Breite $dx$ quer zur Stromrichtung

$$d\lambda = \frac{1}{dx} \cdot \left(\frac{1}{w_1}(y+\eta) + \frac{1}{w_2}(m-y-\eta)\right)$$

wobei wieder

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$
$$\eta = \sqrt{1 - (m-x)^2}.$$

Daraus folgt für die beiden Schranken des Aggregatwiderstandes:

$$W_0 = \frac{1}{w_1 - w_2} \cdot \frac{1}{\int \frac{dy}{\frac{w_2 m}{w_1 - w_2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{1 - (m - y)^2}}}$$

$$W_u = \frac{w_1 w_2}{w_2 - w_1} \cdot \frac{dx}{\int \frac{w_1 m}{w_2 - w_1} + \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - (m - x)^2}}$$

Die numerische Auswertung der Schranken $W_0$ und $W_u$ für das Widerstandsverhältnis $v = \frac{w_1}{w_2} = 2$ und für verschiedene Werte des Raumanteiles $\vartheta$ sowohl für den Fall, daß der eingesprengte Bestandteil der besserleitende ist, als auch für den Gegenfall, enthält die Tabelle VIII.

## III. Kapitel.

### Die Abhängigkeit des Widerstandes von dem Raumverhältnis und vom Widerstandsverhältnis der Bestandteile.

### Tabellen und Diskussionen.

Es erübrigt, die im vorausgegangenen Kapitel entwickelte Methode der Einschließung des Aggregatwiderstandes auf ihre Leistungsfähigkeit hin zu prüfen, in den einzelnen behandelten Fällen untereinander zu vergleichen und schließlich sie zur genauen Darstellung der Abhängigkeit des Aggregatwiderstandes vom Raumanteil $\vartheta$ und Widerstandsverhältnis $v$ der das Aggregat aufbauenden Bestandteile anzuwenden.

Wir betrachten zunächst die Tabellen III bis VIII und greifen aus denselben den für die Leistungsfähigkeit unserer Methode ungünstigsten Fall, nämlich $\vartheta = 50$ Proz., also gleiches Raumverhältnis beider Bestandteile, heraus.

Die alten (Guertlerschen) Schranken — Linearität des Widerstandes bis Linearität der Leitfähigkeit — für $v = w_1/w_2 = 1:2$ betragen 1,500 und 1,333; das Unsicherheitsintervall somit 0,167 = 12 Proz. des ganzen Wertes.

Die neuen Schranken betragen für quadratisches Flächengitter, nicht punktiert:

Partikel quadratisch, Seite zur Stromrichtung parallel (Tabelle III)

besserer Leiter eingesprengt

1,442 bis 1,414; Interv. 0,028 = 2 Proz.,

schlechterer Leiter eingesprengt

1,414 bis 1,387; Interv. 0,027 = 2 Proz.

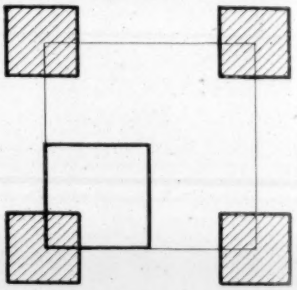


Fig. 15.

Tabelle III (Fig. 15).

Gestalt der Partikel quadratisch; Seite zur Stromrichtung parallel; quadratisches Flächengitter (nicht punktiert); Widerstandsverhältnis $v = 1:2$.

| Spezifischer Widerstand des Aggregats | Raumanteil $\vartheta$ des besser leitenden Bestandteils | $\vartheta = 25$ Proz. | | | $\vartheta = 50$ Proz. | | | $\vartheta = 75$ Proz. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | |
| | wenn der Widerstand lineare Funktion wäre | | | 1,750 | | | 1,500 | | | 1,250 |
| | obere Schranke $W_0$ | 1,714 | 1,672 | | 1,442 | 1,414 | | 1,204 | 1,200 | |
| | Mittel der Schrankenwerte $W_0$ und $W_u$ | | | 1,679 | | | 1,414 | | | 1,192 |
| | untere Schranke $W_u$ | 1,667 | 1,662 | | 1,414 | 1,387 | | 1,196 | 1,167 | |
| | wenn die Leitfähigkeit lineare Funktion wäre | | | 1,600 | | | 1,333 | | | 1,143 |

Tabelle IV (Fig. 16).

Gestalt der Partikel quadratisch; Seite gegen die Stromrichtung um 45° gedreht; quadratisches Flächengitter (nicht punktiert); Widerstandsverhältnis $v = 1:2$.

| Raumanteil $\vartheta$ des besser leitenden Bestandteils | $\vartheta = 25$ Proz. | | $\vartheta = 50$ Proz. | | $\vartheta = 75$ Proz. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt |
| Spezifischer Widerstand des Aggregats: wenn der Widerstand lineare Funktion wäre | 1,750 | | 1,500 | | 1,250 | |
| obere Schranke $W_o$ | 1,716 | — | 1,442 | — | 1,203 | |
| Mittel der Schrankenwerte $W_o$ und $W_u$ | 1,685[1] | | 1,414 | | 1,187[2] | |
| untere Schranke $W_u$ | 1,655 | — | 1,386 | — | 1,166 | |
| wenn die Leitfähigkeit lineare Funktion wäre | 1,600 | | 1,333 | | 1,143 | |

1) Muß etwas hoch liegen, da die kleineren Schrankenwerte fehlen.
2) Muß etwas zu niedrig ausfallen; da die größeren Schrankenwerte fehlen. Tatsächlich ergibt Vergleich mit Tabelle III, Spalte 3, daß der erstere Wert um 0,006 höher, der letztere um 0,005 tiefer liegt, als die entsprechenden Werte für quadratische Elemente, deren Kanten in der Stromrichtung liegen.

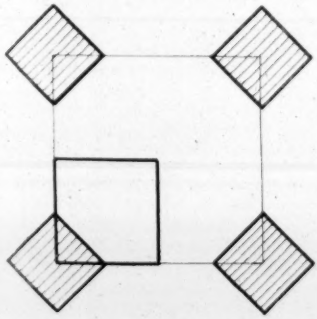


Fig. 16.

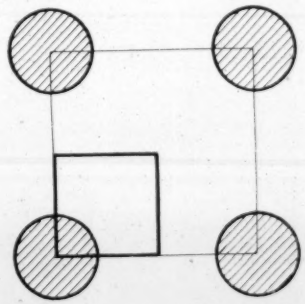


Fig. 17.

Tabelle V (Fig. 17).

Gestalt der Partikel kreisförmig; quadratisches Punktgitter (nicht punktiert); Widerstandsverhältnis $v = 1:2$.

| Raumanteil $\vartheta$ des besser leitenden Bestandteils | $\vartheta = 25$ Proz. | | $\vartheta = 50$ Proz. | | $\vartheta = 75$ Proz. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt |
| Spezifischer Widerstand des Aggregats: wenn der Widerstand lineare Funktion wäre | 1,750 | | 1,500 | | 1,250 | |
| obere Schranke $W_o$ | 1,717 | 1,701 | 1,447 | 1,429 | 1,214 | 1,204 |
| Mittel der Schrankenwerte $W_o$ und $W_u$ | 1,683 | | 1,414 | | 1,189 | |
| untere Schranke $W_u$ | 1,667 | 1,648 | 1,399 | 1,382 | 1,171 | 1,166 |
| wenn die Leitfähigkeit lineare Funktion wäre | 1,600 | | 1,333 | | 1,143 | |

Tabelle VI (Fig. 18).

Gestalt der Partikel quadratisch; Seite zur Stromrichtung parallel; quadratisches Flächengitter (punktiert); Widerstandsverhältnis $v = 1 : 2$.

| Raumanteil $\vartheta$ des besser leitenden Bestandteils | $\vartheta = 25$ Proz. | | | $\vartheta = 50$ Proz. | | | $\vartheta = 75$ Proz. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | |
| Spezifischer Widerstand des Aggregats: wenn der Widerstand lineare Funktion wäre | | | 1,750 | | | 1,500 | | | 1,250 |
| obere Schranke $W_o$ | 1,736 | — | | 1,500 | | | — | 1,226 | |
| Mittel der Schrankenwerte $W_o$ und $W_u$ | | | 1,684 | | | 1,416 | | | 1,189 |
| untere Schranke $W_u$ | 1,631 | — | | 1,333 | | | — | 1,152 | |
| wenn die Leitfähigkeit lineare Funktion wäre | | | 1,600 | | | 1,333 | | | 1,143 |

Bemerkung: Ein größerer Raumanteil $\vartheta$ des eingesprengten Bestandteils als 50 Proz. ist für diese Struktur nicht möglich. Für $\vartheta = 50$ Proz. fallen die beiden Konfigurationen zusammen und bilden die „Schachbrettanordnung".

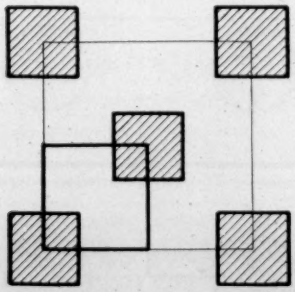


Fig. 18.

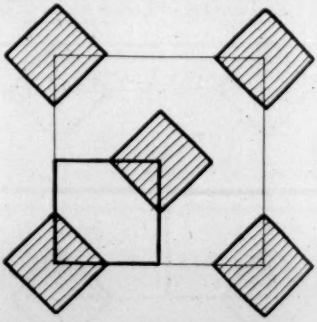


Fig. 19.

Tabelle VII (Fig. 19).

Gestalt der Partikel quadratisch; Seite zur Stromrichtung um 45° gedreht; quadratisches Flächengitter (punktiert); Widerstandsverhältnis $v = 1 : 2$.

| Raumanteil $\vartheta$ des besser leitenden Bestandteils | $\vartheta = 25$ Proz. | | | $\vartheta = 50$ Proz. | | | $\vartheta = 75$ Proz. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | |
| Spezifischer Widerstand des Aggregats: wenn der Widerstand lineare Funktion wäre | | | 1,750 | | | 1,500 | | | 1,250 |
| obere Schranke $W_o$ | 1,738 | 1,749 | | 1,494 | 1,494 | | 1,249 | 1,233 | |
| Mittel der Schrankenwerte $W_o$ und $W_u$ | | | 1,680 | | | 1,414 | | | 1,192 |
| untere Schranke $W_u$ | 1,622 | 1,600 | | 1,333 | 1,333 | | 1,143 | 1,151 | |
| wenn die Leitfähigkeit lineare Funktion wäre | | | 1,600 | | | 1,333 | | | 1,143 |

Bemerkung: Es sei besonders bemerkt, daß die gleichlautenden Zahlen für 50 Proz. Raumanteil dieser Tabelle sich aus zwei wesentlich verschiedenen Ausdrücken errechnen, die aber für dieses Raumverhältnis auf 3 Dezimalen übereinstimmende Werte liefern.

Tabelle VIII (Fig. 20).

Gestalt der Partikel kreisförmig; quadratisches Flächengitter (punktiert); Widerstandsverhältnis $v = 1 : 2$.

| Raumanteil $\vartheta$ des besser leitenden Bestandteils | $\vartheta = 25$ Proz. | | | $\vartheta = 50$ Proz. | | | $\vartheta = 75$ Proz. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | | besser leitender Bestandteil eingesprengt | schlechter leitender Bestandteil eingesprengt | |
| Spezifischer Widerstand des Aggregats: wenn der Widerstand lineare Funktion wäre | | | 1,750 | | | 1,500 | | | 1,250 |
| obere Schranke $W_o$ | 1,736 | — | | 1,490 | 1,479 | | — | 1 228 | |
| Mittel der Schrankenwerte $W_o$ und $W_u$ | | | 1,683 | | | 1,415 | | | 1,190 |
| untere Schranke $W_u$ | 1,629 | — | | 1,352 | 1,342 | | — | 1,152 | |
| wenn die Leitfähigkeit lineare Funktion wäre | | | 1,600 | | | 1,333 | | | 1,143 |

Bemerkung: Ein Raumanteil $\vartheta = 75$ Proz. für den eingesprengten Bestandteil ist für diese Struktur nicht möglich; daher fehlen die entsprechenden Werte in der Tabelle.

Partikel quadratisch, Seite um 45° gedreht (Tabelle IV)

1,442 bis 1,386; Interv. 0,056 = 4 Proz.

Partikel kreisförmig (Tabelle V)

besserer Leiter eingesprengt

1,447 bis 1,399; Interv. 0,048 = 3,3 Proz.,

schlechterer Leiter eingesprengt

1,429 bis 1,382; Interv. 0,047 = 3,3 Proz.

Für quadratisches Flächengitter, punktiert:

Partikel quadratisch, Seite zur Stromrichtung parallel (Tabelle VI)

1,500 bis 1,333; Interv. 0,167 = 12 Proz.

Partikel quadratisch, um 45 Proz. gedreht (Tabelle VII)

1,494 bis 1,333; Interv. 0,161 = 11 Proz.

Partikel kreisförmig

besserer Leiter eingesprengt

1,490 bis 1,352; Interv. 0,138 = 9,8 Proz.,

schlechterer Leiter eingesprengt

1,479 bis 1,342; Interv. 0,137 = 9,7 Proz.

Man sieht zunächst, daß für Aggregate mit verschieden gestalteten und verschieden angeordneten Partikeln die Leistungsfähigkeit der Methode, was die Enge der Grenzen anlangt, zwischen die sie den gesuchten Aggregatwiderstand einschließt, beträchtlich verschieden ist.

Während die Methode z. B. bei nicht punktiertem Flächengitter für quadratische Elemente parallel zur Stromrichtung, das alte Intervall von 12 Proz. auf 2 Proz., also auf ein Sechstel seines Wertes herabdrückt, findet bei quadratischen Elementen, deren Seite gegen die Stromrichtung um 45° gedreht ist, eine Herabdrückung des Intervalls von 12 Proz. auf 4 Proz., somit auf

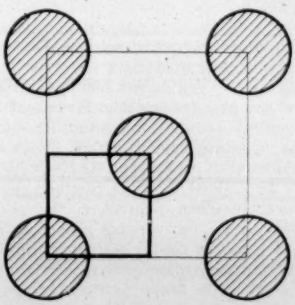


Fig. 20.

ein Drittel des früheren Wertes und bei kreisförmiger Gestalt der Bausteine von 12 Proz. auf 3,3 Proz., also auf etwa ein Fünftel statt. Dieser sehr bedeutenden Leistungsfähigkeit steht eine viel geringere gegenüber für Aggregate mit punktiert quadratischer Gitteranordnung. Allerdings ist, wie schon eingangs bemerkt, der herausgegriffene Fall — gleiches Raumverhältnis beider Bestandteile also $\vartheta = 50$ Proz., der für die Leistungsfähigkeit der Methode allerungünstigste Fall.

Hier ist von Interesse besonders der Fall quadratisch gestalteter Aggregatteilchen, Seite parallel zur Stromrichtung, wo die infinitesimale Methode natürlich zu keinem anderen Ergebnis als die ursprüngliche Guertlersche Betrachtung führen kann. Eine Einengung des Intervalls findet also in diesem einzigen Falle durch die neue Methode überhaupt nicht statt. Dieser

Tabelle IX.

Widerstandsverhältnis $v = w_1/w_2 = 2:1$.

| Raumanteil des schlechtleitenden Bestandteils in Proz. | Guertlers obere Schranke | Neue Schrankenwerte des Widerstandes | | | | | | Guertlers untere Schranke |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | oberer | | | unterer | | | |
| | Lineare Änderung des Widerstandes ergäbe | guter Leiter eingesprengt $W_o^{12}$ | schlechter Leiter eingesprengt $W_o^{21}$ | $W = w_1^{\vartheta} w_2^{1-\vartheta}$ | guter Leiter eingesprengt $W_u^{12}$ | schlechter Leiter eingesprengt $W_u^{21}$ | | Lineare Änderung der Leitfähigkeit ergäbe |
| 0 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | | 1,000 |
| 10 | 1,100 | — | 1,083 | 1,072 | — | 1,059 | | 1,052 |
| 20 | 1,200 | — | 1,163 | 1,149 | — | 1,127 | | 1,111 |
| 25 | 1,250 | 1,214 | 1,204 | 1,180 | 1,171 | 1,166 | | 1,143 |
| 30 | 1,300 | 1,255 | 1,247 | 1,231 | 1,216 | 1,204 | | 1,176 |
| 40 | 1,400 | 1,348 | 1,334 | 1,321 | 1,306 | 1,289 | | 1,250 |
| 50 | 1,500 | 1,447 | 1,429 | 1,414 | 1,399 | 1,382 | | 1,333 |
| 60 | 1,600 | 1,552 | 1,532 | 1,516 | 1,497 | 1,483 | | 1,429 |
| 70 | 1,700 | 1,661 | 1,645 | 1,623 | 1,604 | 1,593 | | 1,539 |
| 75 | 1,750 | 1,717 | 1,701 | 1,682 | 1,667 | 1,648 | | 1,600 |
| 80 | 1,800 | 1,775 | — | 1,741 | 1,719 | — | | 1,667 |
| 90 | 1,900 | 1,889 | — | 1,866 | 1,846 | — | | 1,818 |
| 100 | 2,000 | 2,000 | — | 2,000 | 2,000 | — | | 2,000 |

Fall aber realisiert eben das von Guertler zu Beginn der Betrachtungen in der Literatur über den vorliegenden Gegenstand herangezogene Schachbrettmodell. Von diesem Standpunkte aus betrachtet war also das gewählte Modell tatsächlich nicht nur willkürlich, sondern auch insofern besonders ungünstig, indem gerade dieses Modell allein unter allen denkbaren, die Möglichkeit verdeckte, die Widerstandswerte zwischen engere als die Guertlerschen Schranken einzuschließen.

Wie bereits im vorausgegangenen Kapitel gezeigt ist, treffen die für bestimmte, regelmäßig angeordnete Aggregate gewonnenen Ergebnisse in weit erhöhtem Maße zu für Aggregate, bei denen keiner der beiden Bestandteile bezüglich seines Zusammenhanges im Aggregat vor dem anderen ausgezeichnet ist, wie es für willkürlich zustandegekommene Aggregate aus einer sehr großen Anzahl von Partikeln im allgemeinen wird angenommen werden müssen. Von diesem Standpunkte aus haben wir die Mittelwerte aller vier Schrankenwerte für verschiedene Gestalt und Lagerung der Partikel untereinander und mit dem nach der früheren, gänzlich verschiedenen Betrachtungsweise des Verfassers (1909) sich ergebenden Werte zu vergleichen. Für den der Betrachtung unterzogenen besonderen Fall, also $\vartheta = 50$ Proz. und $v = 1:2$, ergibt das Mittel der vier Schrankenwerte:

| | | |
|---|---|---|
| Tabelle | III . . . . . | 1,415 |
| „ | IV . . . . . | 1,414 |
| „ | V . . . . . | 1,414 |
| „ | IV . . . . . | 1,416 |
| „ | VII . . . . . | 1,414 |
| „ | VIII . . . . . | 1,416 |

Die Berechnungsweise nach der Methode des Verf. in Abhandlung (I) schließlich, ergibt das geometrische Mittel der Widerstände der Bestandteile, also:

$$w = w_1 w_2 = 2 = 1{,}414.$$

Diese Übereinstimmung kann innerhalb der Genauigkeit der numerischen Durchrechnung als Identität bezeichnet werden.

Bezüglich der Abhängigkeit der Leistungsfähigkeit der mitgeteilten Methode vom Raumverhältnis $\vartheta$ der Anteile am Aggregate sei angeführt, daß unter Zugrundelegung quadratischer Teilchen und eines punktierten Gitters, wo für $\vartheta = 50$ Proz. die Methode überhaupt versagt, dieselbe bei $\vartheta = 25$ Proz. und $\vartheta = 75$ Proz. das Intervall beide Male immerhin um etwa ein Drittel seiner Größe herabdrückt.

Besondere Aufmerksamkeit ist der Frage zuzuwenden, wie sich die Leistungsfähigkeit der Methode mit wachsendem Werte des Widerstandsverhältnisses $v$ ändert. Mit wachsendem Werte von $v$ wird ja das Unsicherheitsintervall, das die alten Schranken für den Widerstand des Aggregates offen ließen, an sich immer größer, nicht bloß absolut, sondern auch relativ, in Prozenten des zu bestimmenden Wertes ausgedrückt. Für $v = 4$ z. B. betragen die „Guertlerschen" Schranken 2,5 bis 1,6, also schon 40 Proz. des wahren Wertes! Auch ist gerade für solche relativ große Werte des Widerstandsverhältnisses beider Bestandteile das Auftreten irgendwelcher größerer Abweichungen wiederholt vermutet worden. Wie nun aber Tabelle IX, X und XI, miteinander verglichen, und besonders übersichtlich das die Zahlenwerte

Tabelle X.

Widerstandsverhältnis $v = w_1/w_2 = 3:1$.

| Raumanteil des schlecht leitenden Bestandteils in Proz. | Guertlers obere Schranke | Neue Schrankenwerte des Widerstandes | | | | | Guertlers untere Schranke |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Lineare Änderung des Widerstandes ergäbe | oberer | | $W = w_1^{\vartheta} w_2^{1-\vartheta}$ | unterer | | Lineare Änderung der Leitfähigkeit ergäbe |
| | | guter Leiter eingesprengt | schlechter Leiter eingesprengt | | guter Leiter eingesprengt | schlechter Leiter eingesprengt | |
| | | $W_o^{13}$ | $W_o^{31}$ | | $W_u^{13}$ | $W_u^{31}$ | |
| 0 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 10 | 1,200 | — | 1,138 | 1,116 | — | 1,084 | 1,071 |
| 20 | 1,400 | — | 1,278 | 1,246 | — | 1,188 | 1,154 |
| 25 | 1,500 | 1,379 | 1,348 | 1,316 | 1,272 | 1,230 | 1,200 |
| 30 | 1,600 | 1,466 | 1,421 | 1,390 | 1,354 | 1,311 | 1,250 |
| 40 | 1,800 | 1,651 | 1,580 | 1,552 | 1,523 | 1,461 | 1,364 |
| 50 | 2,000 | 1,850 | 1,760 | 1,732 | 1,704 | 1,622 | 1,500 |
| 60 | 2,200 | 2,053 | 1,969 | 1,933 | 1,898 | 1,817 | 1,667 |
| 70 | 2,400 | 2,288 | 2,216 | 2,158 | 2,110 | 2,046 | 1,875 |
| 75 | 2,500 | 2,406 | 2,358 | 2,280 | 2,225 | 2,175 | 2,000 |
| 80 | 2,600 | 2,525 | — | 2,403 | 2,347 | — | 2,143 |
| 90 | 2,800 | 2,768 | — | 2,688 | 2,636 | — | 2,500 |
| 100 | 3,000 | 3,000 | — | 3,000 | 2,000 | — | 3,000 |

Tabelle XI.

Widerstandsverhältnis $v = w_1/w_2 = 4:1$.

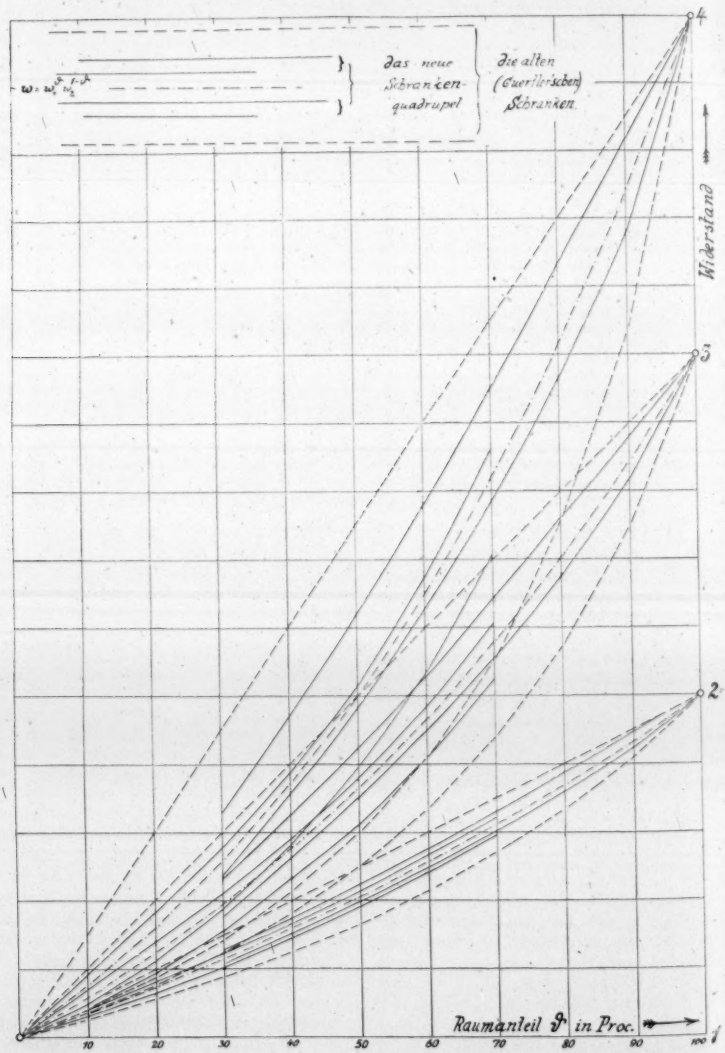
| Raumanteil des schlecht leitenden Bestandteils in Proz. | Guertlers obere Schranke | Neue Schrankenwerte des Widerstandes | | | | | Guertlers untere Schranke |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Lineare Änderung des Widerstandes ergäbe | oberer | | $W = w_1^{\vartheta} w_2^{1-\vartheta}$ | unterer | | Lineare Änderung der Leitfähigkeit ergäbe |
| | | guter Leiter eingesprengt | schlechter Leiter eingesprengt | | guter Leiter eingesprengt | schlechter Leiter eingesprengt | |
| | | $W_o^{14}$ | $W_o^{41}$ | | $W_u^{14}$ | $W_u^{41}$ | |
| 0 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 10 | 1,300 | — | 1,189 | 1,149 | — | 1,097 | 1,081 |
| 20 | 1,600 | — | 1,363 | 1,320 | — | 1,223 | 1,176 |
| 25 | | | | | | | |
| 30 | 1,900 | 1,658 | 1,554 | 1,516 | 1,462 | 1,376 | 1,290 |
| 40 | 2,200 | 1,935 | 1,771 | 1,741 | 1,708 | 1,593 | 1,429 |
| 50 | 2,500 | 2,239 | 2,029 | 2,000 | 1,972 | 1,789 | 1,600 |
| 60 | 2,800 | 2,560 | 2,342 | 2,298 | 2,259 | 2,066 | 1,818 |
| 70 | 3,100 | 2,906 | 2,736 | 2,639 | 2,533 | 2,413 | 2,105 |
| 75 | | | | | | | |
| 80 | 3,400 | 3,270 | — | 3,013 | 2,973 | — | 2,500 |
| 90 | 3,700 | 3,644 | — | 3,482 | 3,304 | — | 3,077 |
| 100 | 4,000 | 4,000 | — | 4,000 | 4,000 | — | 4,000 |

dieser drei Tabellen zusammenfassend darstellende Diagramm I zeigt, nimmt die relative Leistungsfähigkeit der hier in Anwendung gebrachten infinitesimalen Einschränkungsmethode mindestens bis zum Werte $v = 1:4$ nicht ab, sondern zu. Während sich für die in den Tabellen IX, X und XI für die dort zugrunde gelegte kreisförmige Partikelgestalt für das Widerstandsverhältnis $v = 1:2$ eine Einschränkung des Unsicherheitsintervalls auf ein Drittel des alten Wertes ergeben hat, ergibt die Methode für den Wert $v = 4$ eine Einschränkung desselben auf weniger als ein Viertel.

Wenn wir schließlich noch die im vorigen Kapitel gewonnenen Ergebnisse betreffend elliptische Gestalt der Aggregatteilchen uns vergegenwärtigen, so muß als Gesamtergebnis festgestellt werden, daß Gestalt, Orientierung und Raumgitteranordnung der konstituierenden Teilchen auf den Aggregatwiderstand innerhalb des ganzen Bereiches der in der vorliegenden Untersuchung betrachteten Aggregate einen geringen, und für regellose (gleichberechtigte) Anordnung sich überdies noch weitgehend heraushebenden Einfluß haben.

Zur ausführlichen und genauen numerischen Auswertung der Darstellung der Widerstandsschranken für zweidimensionale Aggregate als

Diagramm I. Der elektrische Leitungswiderstand eines Aggregates als Funktion von Raumanteil $\vartheta$ und Widerstandsverhältnis $v$ der Bestandteile.




Funktion der beiden unabhängig Veränderlichen: Raumanteil und Widerstandsverhältnis werden wir uns daher auf eine bestimmte Gestalt der Aggregatteilchen beschränken können. Die Wahl fiel auf die kreisförmige Gestalt der Aggregatpartikel, die somit für die Zahlenwerte der Tabellen IX, X und XI ausschließlich zugrunde liegt. Die numerische Berechnung des Schranken-

quadrupels für kreisförmige Teilchengestalt ist allerdings durchaus nicht die einfachste unter den behandelten, sondern verursacht verhältnismäßig die größte Rechenmühe. Auch ist die Methode für kreisförmige Teilchengestalt durchaus nicht die leistungsfähigste, wie wir gesehen haben. Wenn sie trotzdem hier gewählt wurde, so geschah es aus folgenden Erwägungen:

1. Gerade wegen der weniger weitgehenden Leistung der Methode für kreisrunde Teilchen haben die so errechneten Schranken umso universellere Bedeutung für beliebige Teilchengestalt, indem sie z. B. die Grenzen für quadratische Teilchen, wie wir gesehen haben, in sich einschließen.

2. Diese Gestalt ist am weitgehendsten frei von willkürlichen Annahmen über die wahre Form im Inneren natürlicher etwa durch Molekularkräfte entstandener Aggregate (z. B. zweidimensionale Dünnschliffe solcher) und entspricht, ins Räumliche übertragen, den kugelförmigen Suspensionen (Emulsionen) in flüssigen oder festflüssigen Aggregaten. Dieser Auffassung pflichtet offenbar auch Guertler in seiner letzten Veröffentlichung bei: „.... diese neue Anordnung (gemeint sind eben die hier besprochenen Aggregate mit kreisrundem Einschluß) hat den wesentlichen Vorteil, daß sie dem tatsächlichen Aufbau gewisser Legierungen wesentlich näher kommt“[1]).

3. Gerade die durch kreisförmige Einschlüsse gekennzeichneten Aggregate haben wiederholt bei experimentellen Untersuchungen künstlicher zweidimensionaler Leiterkombinationen Anwendung in der Literatur gefunden und die seinerzeit aufgestellte irrtümliche Behauptung, die Leitfähigkeit gehe linear mit dem Raumanteil der konstituierenden Bestandteile, wurde besonders auf Aggregate dieser Gestalt gestützt.

4. Die für Aggregate mit kreisförmigem Einschluß gewonnenen Daten haben, wie im vorausgegangenen Kapitel gezeigt ist, auch volle Geltung für Aggregate mit elliptischem Einschluß, wenn bei der Orientierung der Einschlußpartikel keine Richtung bevorzugt ist, selbst bis zu beträchtlichen Werten der numerischen Exzentrizität, so daß dieselben zweifellos die weitaus allgemeinste Geltung bezüglich Einschlußgestalt beanspruchen können.

1) W. Guertler, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 17, 281. Leider ist Herrn Guertler bei Abfassung seiner, am 15. Dezember 1920 abgeschlossenen Arbeit meine Publikation vom August 1918 in der Physik. Zeitschr. 19, 374, 1918 offenbar nicht bekannt gewesen, da er sie weder unter meinen übrigen Arbeiten über den Gegenstand zitiert noch sonst darauf Bezug nimmt, obzwar sie wesentliche Gedankengänge und Feststellungen der Guertlerschen Veröffentlichung vorwegnimmt.

Die Kurven des Diagramms I sind nicht durch die numerisch bestimmten Punkte hindurch mittels Kurvenlineal oder sonst ausgleichend hindurchgezogen, sondern die numerisch bestimmten Kurvenpunkte (von 10 zu 10 Proz. Raumanteil) sind durch gerade Strecken miteinander verbunden, um jede Willkürlichkeit in der Kurvenführung auszuschließen und den trotz des gebrochenen Linienzuges hervortretenden stetigen Verlauf der vier Schrankenwerte umso augenfälliger zu machen. Die mittelste Kurve ist auf Grund eines im nachfolgenden (vierten) Kapitel aufgestellten allgemeinen Ausdruckes bestimmt, sie liefert aber auch, innerhalb der erreichten numerischen Rechnungsgenauigkeit, das Mittel der vier neu aufgestellten Schrankenwerte des Widerstandes.

Folgendes verdient möglicherweise noch hinzugefügt zu werden. Unter Zugrundelegung einer früheren Versuchsanordnung von C. Benedicks, die, wie in der Einleitung erwähnt, die Abweichungen des Widerstandes künstlicher Aggregate von der Linearität zum Teil nicht einmal dem Vorzeichen nach richtig ergeben hatte, veröffentlichte inzwischen Herr W. Esmarch neue Messungen[1]). Diese Messungen sind zweifellos besser ausgefallen als die ursprünglichen von Herrn Benedicks, denn während die Abweichungen seiner Messungen von meinen Werten 10 bis 18 Proz. betrugen, findet Herr Esmarch auf Grund seiner Versuche nurmehr eine Abweichung von meinen errechneten Werten „.... meist um 2 bis 3 Proz ....“[2]). Leider hat Herr Esmarch, genau wie Herr Benedicks seinerzeit die großen Abweichungen von meinen Werten zu Lasten meiner Rechnung gebucht hatte, es nun seinerseits ohne Bedenken ebenso mit den kleinen, bei seinen Messungen noch übrig bleibenden Abweichungen getan.

Die beigegebene Tabelle XII zeigt, daß dies nicht berechtigt war. Sie stellt die von W. Esmarch gemessenen Werte für kreisförmige Einsprengung des schlechteren Leiters beim Widerstandsverhältnis 1 : 2, die unverändert seiner Tabelle VII entnommen und auf $w_1 = 1$ reduziert sind, zusammen mit dem in der vorliegenden Arbeit für dieses Aggregat ermittelten oberen Schrankenwert des Widerstandes, entnommen der Tabelle IX, dritte Spalte. Der Vergleich zeigt, daß auch die von Esmarch nach der Benedicksschen Methode angestellten Messungen theoretisch unmögliche, nämlich zu hohe Werte für den Widerstand liefern. Das beigegebene Diagramm II macht dies anschaulich. Der so sichergestellte Fehler beträgt, wach-

1) Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 19, 141, 1922.
2) a. a. O. S. 157.

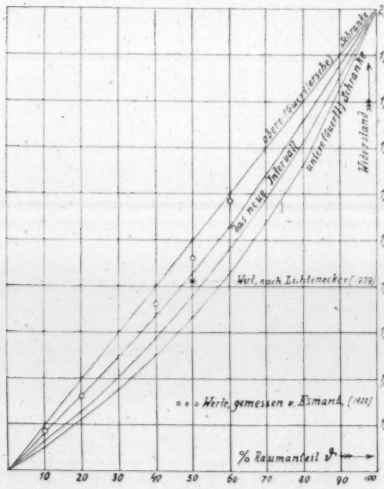
Tabelle XII.

Aggregat mit kreisrundem Einschluß, schlechterer Leiter eingesprengt.

| Raumanteil $\vartheta$ in Proz. | Widerstand gemessen von Esmarch (Tabelle VII) | Widerstand theoretisch möglicher Höchstwert | Abweichung vom Höchstwert in Proz. |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,000 | 1,000 | |
| 10 | 1,085 | 1,083 | |
| 20 | 1,160 | 1,163 | 0,0 |
| 40 | 1,360 | 1,334 | 2,0 |
| 50 | 1,460 | 1,420 | 2,1 |
| 60 | 1,585 | 1,532 | 3,5 |
| 100 | 2,005 | 2,000 | |

Diagramm II. Künstliches zweidimensionales Aggregat mit kreisrunden Einschlüssen; schlechterer Leiter eingesprengt. Widerstandsverhältnis

$$v = \frac{w_1}{w_2} = 2 : 1.$$




send mit steigendem Raumanteil des eingesprengten Bestandteils, 0,0, 2,0, 2,1 bis 3,5 Proz. des gemessenen Wertes. Dies sind die Abweichungen der Esmarchschen Widerstandswerte von den theoretisch möglichen (oberen) Schrankenwerten des Widerstandes; die Abweichung von den wahren Werten des Aggregatwiderstandes sind noch um ein Geringes größer. Doch braucht, da die Leistungsfähigkeit der analytischen Untersuchung nunmehr auch diese Versuche bereits überholt hat, nicht des Näheren darauf eingegangen zu werden.

(Schluß folgt.)

## Die Kataphorese der Kugel.

Von E. Hückel.

Vor kurzem wurde gezeigt[1]), daß die kataphoretische Wanderungsgeschwindigkeit suspendierter Teilchen, deren Oberfläche gegen das Innere der Flüssigkeit, in der sie suspendiert sind, die Potentialdifferenz $\psi$ besitzt, berechnet werden kann nach der Formel:

$$V = C \frac{D\psi}{\eta} X. \qquad (1)$$

Hier bedeutet $V$ die Wanderungsgeschwindigkeit, $X$ die wirkende Feldstärke, $D$ die Dielektrizitätskonstante und $\eta$ den Koeffizienten der inneren Reibung der Flüssigkeit. Der Faktor $C$ ist eine reine Zahl, deren Wert, wie in der erwähnten Notiz gezeigt wurde, im Gegensatz zu einer Behauptung von Smoluchowski, nach welcher jener Faktor allgemein gleich $1/4\pi$ zu setzen wäre, von der Form des Teilchens abhängt und daher allgemein nicht angegeben werden kann; er muß vielmehr in jedem Fall besonders durch eine genaue Analyse der Flüssigkeitsbewegung ermittelt werden. Bei der Ableitung der Formel (1) wurde Gebrauch gemacht von der Voraussetzung, daß der Potentialabfall von der Oberfläche des Teilchens in das Innere der Flüssigkeit an jeder Stelle der Teilchenoberfläche auf einer Strecke erfolgt, welche klein ist gegenüber dem kleinsten Hauptkrümmungsradius der Teilchenoberfläche an dieser Stelle.

In einer Anmerkung[2]) wurde bemerkt, daß für kugelförmige Teilchen sich der Faktor $C$ zu $1/6\pi$ ergibt, und zwar unabhängig von der oben erwähnten Voraussetzung, so daß also für kugelförmige Teilchen für die kataphoretische Wanderungsgeschwindigkeit gilt:

$$V = \frac{1}{6\pi} \frac{D\psi}{\eta} X. \qquad (2)$$

Da die Formel für die kataphoretische Wanderungsgeschwindigkeit der Kugel häufig angewandt wird, und das angegebene Resultat sich von der bisher stets angewandten Formel im Zahlenfaktor unterscheidet, so erscheint es angebracht, die Rechnung, welche zu jenem Resultat führt, zu skizzieren, und damit gleichzeitig die in jener Notiz angestellten allgemeinen Überlegungen durch einen speziellen Fall zu illustrieren. Die Rechnung wird dabei ganz analog durchgeführt, wie das von P. Debye[3]) geschehen ist zur Berechnung der kataphoretischen Kräfte, welche ein einzelnes Ion in einer ver-

1) P. Debye u. E. Hückel, diese Zeitschr. 25, 49, 1924.

2) l. c., S. 50.

3) P. Debye u. E. Hückel, diese Zeitschr. 24, 311 ff., 1923.

dünnten Elektrolytlösung bei Anlegen eines äußeren Feldes durch die Anwesenheit der übrigen Ionen erfährt, nur mit dem Unterschied, daß hier keine besondere Voraussetzung über das Zustandekommen und den Verlauf der Ladungs- und Potentialverteilung um die Kugel gemacht wird.

## § 1. Die Bewegungsgleichungen für die Flüssigkeit.

Wir haben auszugehen von den Stokesschen Bewegungsgleichungen für eine reibende, inkompressible Flüssigkeit mit dem Koeffizienten $\eta$ der inneren Reibung, welche Gültigkeit besitzen, wenn die auftretenden Beschleunigungen so klein sind, daß die Trägheitskräfte neben den Reibungs-, Druck- und Volumkräften vernachlässigt werden können. Diese Gleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} \eta \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{v} + \operatorname{grad} p &= \mathfrak{F}, \\ \operatorname{div} \mathfrak{v} &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

($\mathfrak{v}$ Geschwindigkeit, $p$ Druck, $\mathfrak{F}$ Volumkraft).

Ist nun in der Flüssigkeit an irgendeiner Stelle die elektrische Ladungsdichte $\varrho$ und herrscht dort die Feldstärke $\mathfrak{E}$, so greift an der Stelle[1] die Volumkraft

$$\mathfrak{F} = \varrho \mathfrak{E} \qquad (4)$$

an. Das zu der Ladungsverteilung $\varrho$ gehörige Potential sei $\psi$ genannt, dann ist nach der Poissonschen Gleichung:

$$\Delta \psi = -\frac{4\pi\varrho}{D}. \qquad (5)$$

($D$ Dielektrizitätskonstante), so daß für $\mathfrak{F}$ auch geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{F} = -\frac{D\mathfrak{E}}{4\pi} \Delta\psi. \qquad (6)$$

Die Potentialverteilung um die Kugel hänge nur ab vom Abstand $r$ vom Mittelpunkt der Kugel[1]) und sei dargestellt durch:

$$\psi = \psi(r).$$

Dabei sei über $\psi$ keine weitere Voraussetzung gemacht als die, daß in großer Entfernung von der Kugel $\frac{d\psi}{dr}$ stärker als $\frac{1}{r}$ abnimmt. Das Potential im Unendlichen sei Null gesetzt.

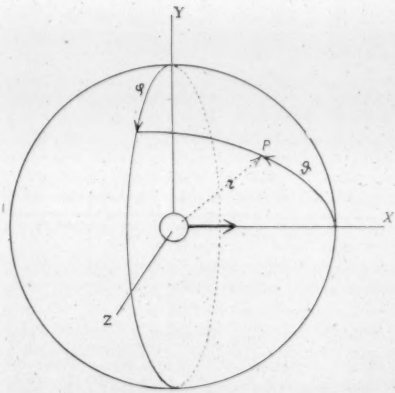
Die Berechnung der kataphoretischen Wanderungsgeschwindigkeit der Kugel hat auf Grund der Bewegungsgleichungen in folgender Weise zu erfolgen: Man denke sich zunächst die Kugel zwangsweise mit einer Geschwindigkeit $V$ in Richtung der wirkenden Feldstärke $X$ durch die Flüssigkeit bewegt. Die hierbei auftretende Flüssigkeitsströmung überträgt auf die Kugel Druckkräfte, deren Resultierende $K = K(V)$ von $V$ abhängt und entgegengesetzt gleich der Summe aller übrigen auf die Kugel wirkenden Kräfte sein muß. Ist $e$ die Ladung der Kugel, so wirkt auf die Kugel die Kraft $eX$ und außerdem die Kraft, welche mit $eX$ zusammen notwendig ist, um der Kugel die Geschwindigkeit $V$ zu erteilen. Es wird eine Geschwindigkeit geben, für welche diese letztere Kraft gerade verschwindet, so daß sich die Resultierende der durch die Strömung übertragenen Druckkräfte mit $eX$ das Gleichgewicht hält; sie ist also zu berechnen aus:

$$K(V) + eX = 0. \qquad (7)$$

Diese Geschwindigkeit ist dann diejenige, welche die Kugel unter Einwirkung der äußeren Feldstärke $X$ in der ruhenden Flüssigkeit annimmt, d. h. ihre kataphoretische Wanderungsgeschwindigkeit.

## § 2. Die allgemeine Form der Geschwindigkeits- und Druckverteilung.

Zur Berechnung der Geschwindigkeits- und Druckverteilung, aus der dann weiter die auf die Kugel übertragenen Druckkräfte zu berechnen sind, führen wir ein mit der Kugel mitbewegtes Polarkoordinatensystem $r$, $\vartheta$, $\varphi$ gemäß nebenstehender Figur ein, dessen Polarachse mit der




Richtung der äußeren Feldstärke, die jetzt $X$ genannt sei, zusammenfalle. Dann lauten die Differentialgleichungen für die Geschwindigkeits- und Druckverteilung:

1) Wir sehen also hier von der Berücksichtigung folgender Punkte ab:
1. Daß infolge der endlichen Relaxationszeit der die Kugel umgebenden Ionenatmosphäre bei der bewegten Kugel die Ladungsverteilung in der Bewegungsrichtung eine Asymmetrie aufweisen wird.
2. Daß durch die Flüssigkeitsströmung die Ladungsverteilung abgeändert wird.

$$\eta \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{v} + \operatorname{grad} p = -\frac{DX}{4\pi} \Delta\psi, \quad \text{mit } \Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\psi}{dr}\right); \tag{8}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0. \tag{8'}$$

Zur Elimination von $\mathfrak{v}$ bilden wir die div der Gleichung (8) und erhalten mit Rücksicht auf (6) und auf die über die Richtung von $\mathfrak{E}$ gemachte Annahme:

$$\Delta p = -\frac{DX}{4\pi}\frac{d}{dr}(\Delta\psi)\cos\vartheta = -\frac{DX}{4\pi}\Delta\frac{d\psi}{dr}\cos\vartheta. \tag{9}$$

Andererseits bilden wir zur Elimination von $p$ die rot von (8) und erhalten unter Einführung der Wirbelstärke $\mathfrak{w} = \operatorname{rot}\mathfrak{v}$:

$$\eta \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{w} = -\frac{D}{4\pi}\operatorname{rot}(X\Delta\psi). \tag{10}$$

Den Symmetrieverhältnissen des Problems entsprechend ist die Strömung in jeder durch die Polarachse gelegten Meridianebene dieselbe. Es ist also $\mathfrak{v}_r$ und $\mathfrak{v}_\vartheta$ vorhanden, während $\mathfrak{v}_\varphi = 0$ ist. Dementsprechend stellt man fest[1]), daß sowohl rot rot $\mathfrak{w}$ wie $\mathfrak{w}$ nur eine $\varphi$-Komponente besitzen; für diese letztere ergibt sich aus (9) die Gleichung:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\mathfrak{w}_\varphi) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\,\mathfrak{w}_\varphi = \frac{DX}{4\pi\eta}\sin\vartheta\frac{d}{dr}\Delta\psi. \tag{11}$$

Zur Berechnung der gesamten Strömung (und ihrer Druckverteilung) zerlegen wir die Strömung in zwei Anteile $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{v}^*$ mit den zugehörigen Drucken $p$ und $p^*$, von denen die erste (die gestrichene), eine spezielle Lösung der Gl. (8) und damit (9) und (11) sein soll, welche den rechten Gliedern dieser Gleichungen entspricht, während $\mathfrak{v}^*$ eine Lösung dieser Gleichungen ohne Volumkräfte, d. h. der zugehörigen homogenen Gleichungen sein soll.

Wir betrachten zunächst die Strömung $\mathfrak{v}'$ für sich. Die dem rechten Gliede von (9) entsprechende Lösung lautet:

$$p' = -\frac{DX}{4\pi}\frac{d\psi}{dr}\cos\vartheta. \tag{12}$$

Um die dem rechten Gliede von (11) entsprechende Lösung für die Wirbelstärke zu finden, machen wir den Ansatz:

$$\mathfrak{w}_\varphi' = P'\sin\vartheta, \tag{13}$$

wobei $P'$ eine Funktion von $r$ ist. Setzen wir dies in (11) ein, so ergibt sich für $P'$ die Differentialgleichung:

$$\frac{2P'}{r^2} - \frac{2}{r}\frac{dP'}{dr} - \frac{d^2P'}{dr^2} = \frac{DX}{4\pi\eta}\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right)\right]. \tag{14}$$

1) Siehe l. c., diese Zeitschr. **24**, 313, 1923.

Die dem rechten Gliede dieser Differentialgleichung entsprechende Lösung lautet:

$$P' = -\frac{DX}{4\pi\eta}\frac{d\psi}{dr}.$$

Wir haben also für die Strömung $\mathfrak{v}'$:

$$\left.\begin{aligned} p' &= -\frac{DX}{4\pi}\frac{d\psi}{dr}\cos\vartheta; \\ \mathfrak{w}_r' &= 0, \\ \mathfrak{w}_\vartheta' &= 0, \\ \mathfrak{w}_\varphi' &= -\frac{DX}{4\pi\eta}\frac{d\psi}{dr}\sin\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Durch Einsetzen in die ursprüngliche Gl. (8) überzeugt man sich, daß diese erfüllt ist.

Nunmehr ist aus (15) auf die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ selbst zurückzuschließen, wozu natürlich die Inkompressibilitätsbedingung (8) mit heranzuziehen ist. Explizite lauten die Differentialgleichungen für die Komponenten $\mathfrak{v}_r'$, $\mathfrak{v}_\vartheta'$:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{w}_\varphi' &= \operatorname{rot}_\varphi \mathfrak{v}' = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathfrak{v}_\vartheta') - \\ &- \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\mathfrak{v}_r') = -\frac{DX}{4\pi\eta}\frac{d\psi}{dr}\sin\vartheta; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{v}' = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\mathfrak{v}_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,\mathfrak{v}_\vartheta) = 0. \tag{17}$$

Setzt man als Lösung an:

$$\mathfrak{v}_r' = R_1'\cos\vartheta, \quad \mathfrak{v}_\vartheta' = R_2'\sin\vartheta,$$

wobei $R_1'$, $R_2'$ noch zu bestimmende Funktionen von $r$ sind, so folgen aus (17) und (18) für $R_1'$, $R_2'$ die Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2R_1') + \frac{1}{r}R_1' = -\frac{DX}{4\pi\eta}\frac{d\psi}{dr},$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2R_1') + \frac{2}{r}R_2' = 0;$$

oder wenn man $r^2R_1'$ und $rR_2'$ als zu bestimmende Funktionen ansieht:

$$\frac{d^2}{dr^2}(r^2R_1') - \frac{2}{r^2}(r^2R_1') = \frac{DX}{2\pi\eta}r\frac{d\psi}{dr}, \tag{18}$$

$$(rR_2') + \frac{1}{2}\frac{d}{dr}(r^2R_1') = 0. \tag{19}$$

Die der rechten Seite von (18) entsprechende spezielle Lösung lautet:

$$r^2R_1' = \frac{DX}{6\pi\eta}\left\{r^2\int\frac{d\psi}{dr}dr - \frac{1}{r}\int r^3\frac{d\psi}{dr}dr\right\}. \tag{20}$$

Nach (19) folgt hieraus weiter:

$$rR_2' = -\frac{DX}{6\pi\eta}\left\{r\int\frac{d\psi}{dr}dr + \frac{1}{2r^2}\int r^3\frac{d\psi}{dr}dr\right\}. \tag{21}$$

Wir haben also für die Geschwindigkeits- und Druckverteilung der Strömung $\mathfrak{v}'$:

$$\left.\begin{aligned} p' &= -\frac{DX}{4\pi}\frac{d\psi}{dr}\cos\vartheta;\\ v_r' &= R_1'\cos\vartheta = \frac{DX}{6\pi\eta}\left[\int\frac{d\psi}{dr}dr - \right.\\ &\qquad \left. - \frac{1}{r^3}\int r^3\frac{d\psi}{dr}dr\right],\\ v_\vartheta' &= R_2'\cos\vartheta = -\frac{DX}{6\pi\eta}\left[\int\frac{d\psi}{dr}dr + \right.\\ &\qquad \left. + \frac{1}{2r^3}\int r^3\frac{d\psi}{dr}dr\right],\\ v_\varphi' &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Um die allgemeine Form der gesamten Geschwindigkeits- und Druckverteilung der Strömung $\mathfrak{v}$ zu bekommen, haben wir hierzu eine Strömung $\mathfrak{v}^*$ zu addieren, welche den volumkraftfreien Gleichungen:

$$\eta\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}^* + \mathrm{grad}\,p^* = 0 \qquad (23)$$

sowie:

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{v}^* = 0 \qquad (23')$$

genügt.

Eliminieren wir wieder zunächst $\mathfrak{v}^*$ durch Divergenzbildung von (23), so erhalten wir:

$$\Delta p^* = 0. \qquad (24)$$

Als Lösung setzen wir an:

$$p^* = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right)\cos\vartheta, \qquad (25)$$

wobei $A_0$, $B_0$, $A_1$, $B_1$ noch zu bestimmende, willkürliche Konstanten sind. Eliminieren wir weiter $p^*$ durch Rotationsbildung von (23), so erhalten wir für $\mathfrak{w}_\varphi^*$ die entsprechende, homogene Gleichung; machen wir für $\mathfrak{w}_\varphi^*$ den Ansatz:

$$\mathfrak{w}_\varphi^* = P^*\sin\vartheta,$$

so folgt für $P^*$ aus der (14) entsprechenden homogenen Gleichung:

$$P_1^* = C_1 r + \frac{D_1}{r^2}, \qquad (26')$$

und also:

$$\mathfrak{w}_\varphi^* = \left(C_1 r + \frac{D_1}{r^2}\right)\sin\vartheta. \qquad (27)$$

Durch Einsetzen von (25) und (27) in (23) stellt man fest[1]), daß:

$$B_0 = 0, \quad C_1 = -\frac{A_1}{2\eta}, \quad D_1 = \frac{B_1}{\eta}$$

sein muß, so daß also:

$$\mathfrak{w}_\varphi^* = \left(-\frac{A_1}{2\eta}\frac{1}{r} + \frac{B_1}{\eta}\frac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta.$$

[1]) Siehe l. c., S. 314, Gleichungen (29), (30).

Setzt man jetzt, um auf $\mathfrak{v}^*$ selbst zu kommen, als Lösung der (16) und (17) entsprechenden Gleichungen

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\mathfrak{v}_\vartheta^*) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\mathfrak{v}_r^*) = \left(-\frac{A_1}{2\eta}\frac{1}{r} + \frac{B_1}{\eta}\frac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta,$$

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{v}^* = 0.$$

an:

$$\mathfrak{v}_r^* = R_1^*\cos\vartheta, \quad \mathfrak{v}_\vartheta^* = R_2^*\sin\vartheta,$$

wo $R_1^*$, $R_2^*$ noch zu bestimmende Funktionen von $r$ sind, so bekommt man für $R_1^*$, $R_2^*$ die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2}{dr^2}(r^2R_1^*) = \frac{2}{r^2}(r^2R_1^*) = \frac{A_1}{\eta}r^2 - \frac{2B_1}{\eta}\frac{1}{r},$$

$$rR_2^* + \frac{1}{2}\frac{d}{dr}(r^2R_1^*) = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichungen lauten:

$$r^2R_1^* = \frac{A_1}{\eta}\frac{r^4}{10} + \frac{B_1}{\eta}r + A_2r^2 + B_2\frac{1}{r},$$

$$rR_2^* = -\frac{A_1}{\eta}\frac{r^3}{5} - \frac{B_1}{2\eta} - A_2r + \frac{B_2}{2}\frac{1}{r^2},$$

so daß sich für die Geschwindigkeits- und Druckverteilung der Strömung $\mathfrak{v}^*$ ergibt:

$$\left.\begin{aligned} p^* &= A_0 + \left(A_1r + \frac{B_1}{r^2}\right)\cos\vartheta;\\ v_r^* &= \left[\frac{A_1}{\eta}\frac{r^2}{10} + \frac{B_1}{\eta}\frac{1}{r} + A_2 + B_2\frac{1}{r^3}\right]\cos\vartheta;\\ v_\vartheta^* &= \left[-\frac{A_1}{\eta}\frac{r^2}{5} - \frac{B_1}{2\eta}\frac{1}{r} - A_2 + \frac{B_2}{2}\frac{1}{r^3}\right]\sin\vartheta;\\ v_\varphi^* &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Die allgemeine Form der gesamten Geschwindigkeits- und Druckverteilung ergibt sich aus (22) und (28) zu:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{v}^*, \qquad (29)$$

$$p = p' + p^*. \qquad (29')$$

## § 3. Erfüllung der Grenzbedingungen.

Nunmehr ist festzustellen, ob mit der allgemeinen, durch (22), (28), (29), (29') gegebenen Geschwindigkeits- und Druckverteilung die vorgeschriebenen Grenzbedingungen erfüllt werden können, bzw. welche Werte die darin auftretenden Konstanten besitzen müssen, damit die Grenzbedingungen erfüllt werden.

Die Grenzbedingungen verlangen erstens: daß im Unendlichen die Geschwindigkeit in Richtung der negativen Feldstärke $X$ gerichtet ist und den Absolutwert $V$ hat, und zweitens, daß an der Oberfläche der Kugel die Geschwindigkeit verschwindet; ferner sei das Potential im Unendlichen gleich Null gesetzt und sein

Wert an der Oberfläche der Kugel mit $\overline{\psi}$ bezeichnet. Die Grundbedingungen lauten also:

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } r=\infty \text{ soll sein: } v_r=-V\cos\vartheta,\\ &\qquad v_\vartheta=V\sin\vartheta;\quad \psi=0;\\ &\text{für } r=a \text{ (}a\text{ Radius der Kugel) soll sein:}\\ &\qquad v_r=0,\ v_\vartheta=0;\quad \psi=\overline{\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Aus (30) folgt zunächst:

$$A_1=0 \tag{31}$$

und weiter:

$$\left.\begin{aligned} -V&=\frac{DX}{6\pi\eta}\left[\int_\infty^r\frac{d\psi}{dr}dr-\right.\\ &\left.-\left(\frac{1}{r^3}\int_\infty^r r^3\frac{d\psi}{dr}dr\right)_{r=\infty}\right]+A_2,\\ V&=-\frac{DX}{6\pi\eta}\left[\int_\infty^r\frac{d\psi}{dr}dr+\right.\\ &\left.+\left(\frac{1}{2r^3}\int_\infty^r r^3\frac{d\psi}{dr}dr\right)_{r=\infty}\right]-A_2. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Hieraus ergibt sich, daß:

$$\left(\frac{1}{r^3}\int_\infty^r r^3\frac{d\psi}{dr}dr\right)_{r=\infty}$$

verschwinden muß, damit die Grenzbedingung durch die allgemein angegebene Form der Geschwindigkeitsverteilung erfüllt werden kann, d. h. es muß $\frac{d\psi}{dr}$ stärker als $\frac{1}{r}$ verschwinden; das wird immer der Fall sein, da $\frac{d\psi}{dr}\sim\frac{1}{r^2}$ der Potentialverteilung einer geladenen Kugel entspricht. Aus (32) ergibt sich dann:

$$A_2=-\frac{DX}{6\pi\eta}\int_\infty^r\frac{d\psi}{dr}dr-V. \tag{33}$$

Aus (30′) folgt unter Berücksichtigung von (31) und (32):

$$\begin{aligned} &\frac{DX}{6\pi\eta}\left[\int_\infty^a\frac{d\psi}{dr}dr-\frac{1}{a^3}\int_\infty^a r^3\frac{d\psi}{dr}dr\right]+\\ &\quad+\frac{B_1}{\eta}\frac{1}{a}-V+\frac{B_2}{a^3}=0,\\ &-\frac{DX}{6\pi\eta}\left[\int_\infty^a\frac{d\psi}{dr}dr+\frac{1}{2a^3}\int_\infty^a r^3\frac{d\psi}{dr}dr\right]-\\ &\quad-\frac{B_2}{2\eta}\frac{1}{a}+V+\frac{B_2}{2a^3}=0. \end{aligned}$$

Und hieraus folgt, wenn man bedenkt, daß

$$\int_\infty^a\frac{d\psi}{dr}dr=\overline{\psi}:$$

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{\eta a}&=\frac{3}{2}V-\frac{DX}{4\pi\eta}\overline{\psi},\\ \frac{B_2}{a^3}&=-\frac{V}{2}+\frac{DX}{12\pi\eta}\overline{\psi}+\frac{DX}{6\pi\eta}\frac{1}{a^3}\int_\infty^a r^3\frac{d\psi}{dr}dr. \end{aligned} \tag{34}$$

Setzt man die so für die Konstanten erhaltenen Werte (31), (33), (34) in die allgemeine durch (22), (28), (29), (29′) gegebene Form der Geschwindigkeits- und Druckverteilung ein, so erhält man die gesamte Geschwindigkeits- und Druckverteilung zu:

$$\begin{aligned} p&=\left[\frac{3}{2}V-\frac{DX}{4\pi}\overline{\psi}\frac{a}{r^2}-\frac{DX}{4\pi}\frac{d\psi}{dr}\right]\cos\vartheta,\\ v_r&=\left[-V\left(1-\frac{3}{2}\frac{a}{r}+\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right)-\frac{DX}{4\pi\eta}\overline{\psi}\left(\frac{a}{r}-\right.\right.\\ &\quad\left.\left.-\frac{1}{3}\frac{a^3}{r^3}\right)+\frac{DX}{6\pi\eta}\left(\psi-\frac{1}{r^3}\int_a^r r^3\frac{d\psi}{dr}dr\right)\right]\cos\vartheta,\\ v_\vartheta&=\left[V\left(1-\frac{3}{4}\frac{a}{r}-\frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right)+\frac{DX}{4\pi\eta}\overline{\psi}\left(\frac{1}{2}\frac{a}{r}+\right.\right.\\ &\quad\left.\left.+\frac{1}{6}\frac{a^3}{r^3}\right)-\frac{DX}{6\pi\eta}\left(\psi+\frac{1}{2r^3}\int_a^r r^3\frac{d\psi}{dr}dr\right)\right]\sin\vartheta,\\ v_\varphi&=0, \end{aligned} \tag{35}$$

wobei noch die belanglose Konstante $A_0$ in (28′) gleich Null gesetzt worden ist, da sie nur die Bedeutung eines überall hinzukommenden konstanten Druckes hat.

Die Strömung kann also angesehen werden als zusammengesetzt aus einer reinen Stokesschen Strömung $v_1$ [dem $V$ proportionalen Anteil in (35)], welche die Grenzbedingungen an der Oberfläche der Kugel und im Unendlichen erfüllt, einer volumkraftfreien Strömung $v_2$, welche überall dem Potential $\psi$ an der Oberfläche proportional ist, an der Oberfläche die Grenzbedingungen verletzt und im Unendlichen verschwindet, und einer dritten Strömung $v_3$, welche der Wirkung der Volumkräfte entspricht, im Unendlichen verschwindet, die Grenzbedingungen an der Oberfläche verletzt, mit der zweiten Strömung zusammen sie aber erfüllt. Man verifiziert dies leicht, indem man in (35) einmal $r=a$, $\psi=\overline{\psi}$, und das andere Mal $r=\infty$, $\psi=0$ setzt. Dieses Resultat entspricht der in der zitierten Notiz allgemein aufgewiesenen Zerlegbarkeit der Gesamtströmung.

## § 4. Die von der Strömung übertragene Gesamkraft.

Es bleibt nun noch übrig, aus der durch (35) gegebenen Geschwindigkeits- und Druckverteilung die auf die Kugel übertragene Gesamtkraft zu berechnen. Wegen der Symmetrieverhältnisse

der Strömung heben sich alle Komponenten senkrecht zur Polarachse (zur Richtung der Feldstärke) auf; führen wir jetzt ein rechtwinkliges Koordinatensystem $x$, $y$, $z$ ein, dessen $x$-Achse mit der Richtung von $X$ zusammenfällt, so ist es also nur nötig, die Spannungskomponenten in Richtung von $x$ zu betrachten.

Durch ein Flächenelement mit der Normalen $n$ wird von der Flüssigkeit in der $x$-Richtung die Spannungskomponente $p_{nx}$ übertragen. Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Richtungscosinusse der Normalen $n$, so gilt für $p_{nx}$:

$$p_{nx} = \alpha p_{xx} + \beta p_{yx} + \gamma p_{zx}; \tag{36}$$

außerdem ist:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ p_{yx} &= \eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \\ p_{zx} &= \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right). \end{aligned}\right| \tag{37}$$

Die gesamte auf die Kugel übertragene Kraft ergibt sich durch Integration von $p_{nx}$ über die Kugeloberfläche. Der $V$ proportionale Teil $v_1$ der Strömung ergibt so nach Stokes die Kraft:

$$K_1 = -6\pi a \eta V; \tag{38}$$

es brauchen also nur die von den beiden anderen Teilströmungen $v_2$ und $v_3$ übertragenen Kräfte neu berechnet zu werden. Für diese ergibt zunächst nach (36) und (37) eine längere, aber elementare Rechnung für $p_{rx}$ den Ausdruck:

$$p_{rx} = \frac{DX}{4\pi}\left[\psi\frac{a^3}{r^4} - \frac{2}{r^4}\int_a^r r^3 \frac{d\psi}{dr}dr + \frac{d\psi}{dr}\right] + \\ + \frac{DX}{4\pi}\left[\psi\left(\frac{3a}{r^2} - \frac{3a^3}{r^4}\right) + \frac{6}{r^4}\int_a^r r^3\frac{d\psi}{dr}dr\right]\cos^2\vartheta.$$

Hieraus erhält man durch Integration über die Kugeloberfläche für die durch $v_2 + v_3$ übertragene Kraft, indem man $r = a$ setzt:

$$K_2 + K_3 = DX\bar{\psi}a + DXa^2\left(\frac{d\psi}{dr}\right)_{r=a}. \tag{39}$$

Nun ist nach den Grundgesetzen der Elektostatik:

$$-Da^2\left(\frac{d\psi}{dr}\right)_{r=a} = e, \tag{40}$$

wenn $e$ die Gesamtladung der Kugel bedeutet, so daß (39) auch geschrieben werden kann:

$$K_2 + K_3 = DX\bar{\psi}a - eX. \tag{41}$$

Die gesamte durch die Strömung übertragene Kraft ist also nach (38) und (41):

$$K = K_1 + K_2 + K_3 = -6\pi a\eta V - eX + DX\bar{\psi}a. \tag{42}$$

## § 5. Die Formel für die kataphoretische Wanderungsgeschwindigkeit.

An der Kugel selbst greift die Kraft $eX$ an. Die kataphoretische Wanderungsgeschwindigkeit ergibt sich also aus:

$$K + eX = -6\pi a\eta V + DX\bar{\psi}a = 0 \tag{43}$$

zu:

$$V = \frac{1}{6\pi}\frac{D\bar{\psi}}{\eta}X, \tag{44}$$

und dieses ist das vorausgenommene Resultat (2).

Es ist noch von Interesse, dieses Resultat zu vergleichen mit dem Ausdruck, wie er sich für die Wanderungsgeschwindigkeit eines einzelnen Ions unter Wirkung der Feldstärke $X$ in einer reinen Flüssigkeit ergibt, wenn man das Ion als Kugel vom Radius $a$ und der Ladung $e$ ansieht. Hierfür schließt man bekanntlich in einfacher Weise folgendermaßen: an dem Ion greift die Kraft $eX$ an; bewegt es sich mit der Geschwindigkeit $V$, so erfährt es nach Stokes die Reibungskraft:

$$-6\pi a\eta V.$$

Aus der Bedingung:

$$eX - 6\pi a\eta V = 0$$

ergibt sich die Wanderungsgeschwindigkeit des Ions zu:

$$V = \frac{e}{6\pi a\eta}X. \tag{45}$$

Andrerseits kann man aus (44) zu diesem Ausdruck gelangen; denn da außerhalb des Ions keine Ladungen vorhanden sind, kann das Potential $\bar{\psi}$ an der Oberfläche des Ions einfach berechnet werden zu:

$$\bar{\psi} = \frac{e}{Da}. \tag{46}$$

Geht man mit diesem Ausdruck in (44) ein, so ergibt sich für $V$ wieder das Resultat (45).

Es fällt also der vermeintliche Widerspruch dahin, den Smoluchowski glaubte feststellen zu müssen[1]), wenn man einmal die Wanderungsgeschwindigkeit eines Ions aus der Stokesschen Formel und das andere Mal aus der Formel für die Kataphorese berechnet. Smoluchowski mußte aber zu diesem Widerspruch gelangen, da er in (44) $\frac{1}{4\pi}$ statt $\frac{1}{6\pi}$ setzte.

Bei suspendierten Teilchen werden die Bedingungen für die Gültigkeit von (46) kaum je praktisch erfüllt sein. Die Umgebung wird wohl stets als verdünnte Elektrolytlösung aufgefaßt werden müssen; dann hat man zur Berechnung

1) M. v. Smoluchowski in L. Graetz, Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Bd. II, S. 384.

der kataphoretischen Kraft in (42) für $\overline{\psi}$ nicht mehr den Wert (46), sondern den Wert[1]):

$$\overline{\psi} = \frac{e}{Da} \frac{1}{1+\varkappa a}$$

einzusetzen, wobei $\varkappa$ die für die Elektrolytlösung charakteristische reziproke Länge ist:

$$\varkappa = \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon^2 \Sigma n_i z_i^2}{DkT}}$$

($\varepsilon$ elektrisches Elementarquantum, $n_i$ Anzahl der Ionen der Sorte $i$ im ccm, $z_i$ ihre Wertigkeit, $k$ Boltzmannsche Konstante, $T$ absolute Temperatur).

Dieses explizite Resultat für $\overline{\psi}$ gilt indessen nur, so lange für die Ionenverteilung nur Coulombsche Kräfte ins Spiel treten und die Differentialgleichung für $\psi$ in der l. c. angegebenen Weise genähert behandelt werden darf. Bedingung für letzteres ist, daß das Potential $\overline{\psi}$ des Teilchens so klein ist, daß $e\overline{\psi}/kT$ als Größe, welche klein gegen 1 ist, angesehen werden kann. Sobald diese Voraussetzungen nicht mehr zutreffen, ist der Zusammenhang zwischen $\overline{\psi}$ und $e$ ein viel komplizierterer, so daß z. B. zwischen diesen beiden Größen keine Proportionalität mehr besteht. Lassen wir hier aber die genannten Voraussetzungen gelten, so erhält man für die kataphoretische Kraft:

$$K = -6\pi a\eta V + eX\left(\frac{1}{1+\varkappa a} - 1\right).$$

Ist $\varkappa a \ll 1$, d. h. ist die Konzentration genügend klein, so liefert die Entwickelung nach $\varkappa a$ für $K$ den Ausdruck:

$$K = 6\pi a\eta V - eX\varkappa a.$$

Dieses ist der früher[2]) berechnete Ausdruck. Bei Ionen kann die Geschwindigkeit aber nicht aus (43) berechnet werden, da hier noch berücksichtigt werden muß, daß infolge der endlichen Relaxationszeit der Ionenatmosphäre beim bewegten Ion eine Unsymmetrie der Ladungsverteilung auftritt, welche eine bremsende Kraft hervorruft, wie dies a. a. O. ausgeführt wurde.

1) P. Debye u. E. Hückel, diese Zeitschr. **24**, 192, 1923, Gleichungen (17) u. (18').
2) l. c. diese Zeitschr. **24**, 315, 1923, Gl. (39).

Zürich, Physikal. Inst. d. Eidg. Techn. Hochschule, 5. März 1924.

(Eingegangen 10. März 1924.)

## Über Spulen mit veränderlicher Selbstinduktion für Mittelfrequenz.

Von H. Winter-Günther und J. Zenneck.

Für Versuche mit Wechselströmen, deren Frequenz etwa in der Gegend von 500/sec liegt (Miltelfrequenz), ist das Bedürfnis nach Spulen mit veränderlicher Induktivität nicht ganz leicht zu befriedigen. Die Anordnungen, die für niederfrequente Ströme gebräuchlich sind, haben zu viel Eisen, und eisenfreie Spulen von genügend großer Induktivität erhalten unbequem große Dimensionen, wenn ihr Widerstand ausreichend klein sein soll. Eine Anordnung, die diesem Mangel abhilft und sich durch Einfachheit auszeichnet, ist im hiesigen Institut seit längerer Zeit im Gebrauch. Da sie sich bei allen möglichen Untersuchungen sehr gut bewährt hat, so glauben wir sie im folgenden kurz beschreiben zu dürfen.

Die Anordnung besteht aus einem geraden, unterteilten Eisenkern, auf dem 2 Spulen $S_1$ und $S_2$ verschiebbar sind (Fig. 1). Werden die beiden Spulen hintereinander geschaltet, so ist ihre Induktivität am größten, wenn die beiden Spulen sich in der Mitte des Kerns berühren; sie wird umso kleiner, je mehr die Spulen auseinander gerückt werden.

Die Eisenkerne werden aus einseitig mit Papier beklebten Blechen von 50 cm Länge und 3 cm Breite, den Normaldimensionen des Epsteinapparates, angefertigt. Zur Verringerung der Eisenverluste wird die Dicke der Bleche so klein als möglich und als Material möglichst hochlegiertes Eisen gewählt. Wir haben 2 Kerngrößen verwendet; eine vom Querschnitt $3\times2{,}7$ und eine vom Querschnitt $3\times5{,}4$ cm². Der letztere Kern ist im folgenden als doppelter Kern bezeichnet. Auf den einfachen Kern bezieht sich Fig. 1. Als Material stand uns legiertes Blech von 0,4 mm zur Verfügung, das wir Herrn Direktor Dr. Fleischmann von der A.E.G. und solches von 0,3 mm, das wir Herrn Direktor Dr. Winter-Günther von den Siemens-Schuckert-Werken verdanken. Die auf das erste Material bezüglichen Messungen sind im folgenden mit Kreuzen, die auf das zweite mit Kreisen eingetragen.

Die Windungszahl des Spulenpaars richtet sich nach der Induktivität, die erzielt werden soll. Sie betrug bei unserer Anordnung mit dem einfachen Kern $2\times119$, bei derjenigen mit dem doppelten Kern $2\times224$. Der Drahtdurchmesser war in beiden Fällen 1,5 mm, der Gleichstromwiderstand der beiden Spulen im ersten Fall 0,3, im zweiten 1,1 Ohm.

In Fig. 2 stellen die Kurven $A$ die Induktivität der beiden hintereinander geschalteten Spulen auf dem einfachen Kern in ihrer Abhängigkeit von dem Abstand der beiden Spulen dar (vgl. das Schema in Fig. 2 rechts oben), und zwar die Kurven $A_1$ nach Messungen mit der gewöhnlichen Schwachstrom-Wechselstrom-Brücke, die Kurven $A_2$ nach Messung mit einer Starkstrom-Wechselstrom-Brücke, bei der ein

Fig. 1.

Strom von 2 Amp. die Spulen durchfloß (Frequenz in beiden Fällen ca. 500/sec). Die Kurven $B_1$ bzw. $B_2$ geben in entsprechender Weise den äquivalenten Wirkwiderstand der Eisen (Hyste-

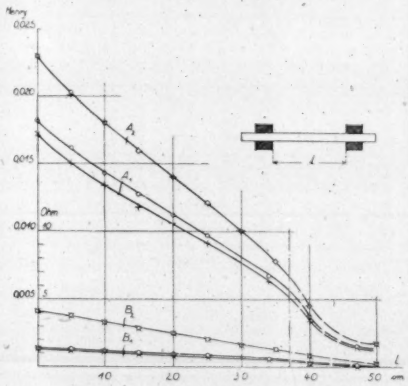



Fig. 2.

resis- und Wirbelstrom-)Verluste, wie ihn die angegebenen Messungen lieferten. In Fig. 3 sind die entsprechenden Meßresultate für die Spulen mir dem doppelten Kern wiedergegeben. Dabei war der Strom in den Spulen bei der Stark-

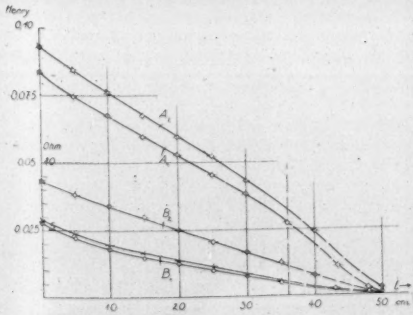



Fig. 3.

strombrücke (Kurve $A_2$ bzw. $B_2$) 1 Amp. Sowohl in Fig. 2 als in Fig. 3 reicht der ausgezogene Teil der Kurven (vgl. die strichpunktierte Ordinate) bis zu demjenigen Abstand der Spulen, bei dem ihre äußeren Stirnflächen eben mit den Enden des Eisenkerns abschneiden. Die gestrichelt eingetragene bezieht sich auf den Fall, daß die Spulen noch weiter voneinander entfernt werden, so daß also ihr Inneres nur noch teilweise vom Eisenkern ausgefüllt ist[1]). Vermeidet man eine so starke Entfernung der Spulen und beschränkt man sich auf das Gebiet, in dem die Spulen noch vollkommen auf dem Eisenkern sitzen, so fällt die Induktivität der Spulen, wie die Kurven $A$ von Fig. 2 und 3 zeigen, sehr nahezu linear mit dem Abstand derselben ab, wie man es von einem bequemen Selbstinduktionsvariometer verlangt. Dabei bleiben die Eisenverluste nach den Kurven $B$ innerhalb sehr mäßiger Grenzen. Das Dekrement $(R/2\nu L)$[2]) der Anordnung und ihr Phasenwinkel ist für alle Entfernungen der Spulen ungefähr gleich, und zwar beträgt für die verwandte Meßfrequenz von 500/sec bei dem einfachen Eisenkern das Dekrement 0,076 (Schwachstrombrücke) bzw. 0,170 (Starkstrombrücke), der Phasenwinkel 89° bzw. ca. 86,5°. Bei dem doppelten Eisenkern sind die entsprechenden Zahlen 0,054 bzw. 0,086 und 89° bzw. 88,5°.

Für die praktische Verwendung der Spulen ist die Frage wesentlich, bis zu welcher Ampèrewindungszahl sie an Stelle von eisenfreien Spulen benutzt werden können, d. h. bis zu welcher Ampèrewindungszahl ihre Stromspannungscharakteristik geradlinig ist. Das Ergebnis der Messungen, die zu diesem Zweck ebenfalls mit 500-periodigem Wechselstrom für die Spulen mit einfachem und doppeltem Eisenkern gemacht wurden, ist in Fig. 4 bzw. 5 dargestellt. Darin beziehen sich die oberen Kurven auf den Fall, daß die beiden Spulen sich berührten ($l = 0$), die unteren auf den Fall, daß der

1) Zur Herstellung kleinerer Induktivität kann man die Spulen gegen einander schalten; doch empfiehlt sich statt dessen Auswechseln derselben gegen solche von kleinerer Windungszahl.

2) $R$ = äquivalenter Wirkwiderstand der Eisenverluste, $\nu$ = Frequenz.

Abstand der inneren Stirnflächen der Spulen $l = 30$ cm war. Bis zu der aus den Figuren ersichtlichen Amperewindungszahl können also die Spulen unbedenklich statt eisenfreier Spulen in Kreisen verwendet werden, in denen eine von der Stromstärke merklich unabhängige Induktivität verlangt wird.

Die beschriebene Anordnung läßt sich nicht nur zur Herstellung einer veränderlichen Induktivität (beide Spulen im selben

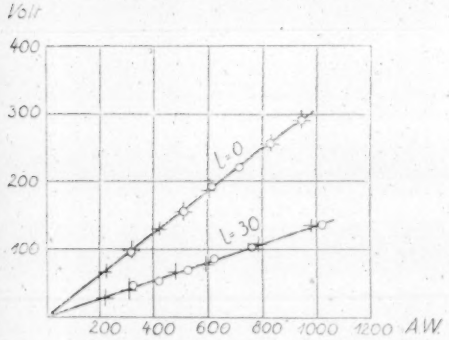


Fig. 4.

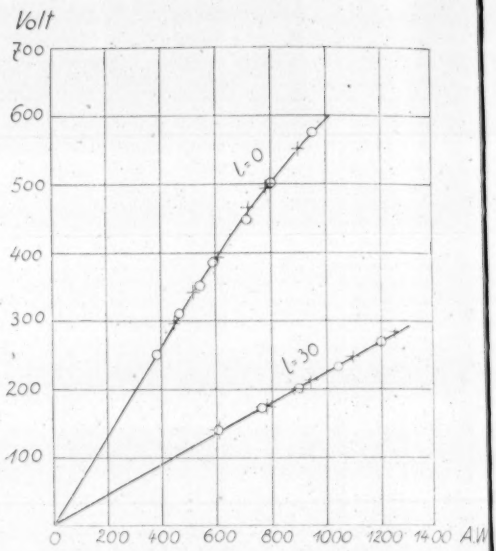


Fig. 5.

Kreis), sondern ebenso auch zur Herstellung einer veränderlichen Koppelung (beide Spulen in verschiedenen Kreisen) verwenden. Sie ist auch sehr bequem für Röhrengeneratoren im Gebiet der hörbaren Frequenzen, wenn man auf dem Kern außer den beiden Spulen, die zur Veränderung der Induktivität dienen, noch eine dritte Spule für die Rückkoppelung anbringt[1]).

1) Für diese dritte Spule sind die beiden in Fig. 1 oben befindlichen Anschlußklemmen bestimmt.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 8. April 1924.)

## Zur Präzisierung der Sichtmessung.

Von A. Wigand und K. Genthe.

Inhalt: 1. Aufgabe. — 2. Einfluß der Entfernung des Ziels, Bestimmung der Sichtweite. — 3. Einfluß der Größe des Ziels. — 4. Einfluß der Verwendung eines Fernglases mit dem Sichtmesser. — 5. Einfluß der Sehschärfe des Beobachters. — 6. Zusammenfassung.

### 1. Aufgabe.

Die Methode des Mattglas-Sichtmessers[1]) läßt sich über den anfangs erstrebten Grad von Genauigkeit hinaus verfeinern, indem man einige zunächst als Nebeneinflüsse außer acht gelassene Gesichtspunkte mit in Betracht zieht und bei der Berechnung des Sichtwertes aus den Beobachtungen durch Korrektionen berücksichtigt.

Den Anlaß zu einer solchen Präzisierung der Methode gab die Verwendung des Sichtmessers bei der Bestimmung der vertikalen Sicht nach einem Verfahren, das sich eines Pilotballons als Ziel bedient und den Sichtmesser vor das Objektiv eines Ballontheodoliten geschaltet verwendet. Der Theodolit diente, außer zum besseren Erkennen des im Laufe des Aufstiegs kleiner werdenden Zieles, zur Bestimmung der Entfernung und Richtung des Ziels.

Hierbei sind, wenn man auf mehr als nur qualitative Ergebnisse Wert legt, die folgenden Besonderheiten zu beachten: Entfernung und Größe des Ziels ändern sich in sehr weiten Grenzen; und durch die Verwendung eines Fernrohrs zusammen mit dem Sichtmesser wird die Trübung des Meßgerätes vergrößert im Vergleich mit der Sichtmessertrübung allein. Außer der experimentellen und theoretischen Untersuchung dieser Einflüsse und ihrer Berücksichtigung bei der Berechnung des Sichtwertes wurde noch durch Versuche festgestellt, inwieweit Unterschiede der Sehschärfe bei verschiedenen Sichtbeobachtern von Einfluß auf das Ergebnis der Messungen sind.

1) A. Wigand, Physik. Zeitschr. **20**, 151, 1919.

## 2. Einfluß der Entfernung des Ziels, Bestimmung der Sichtweite.

In einer vorangehenden Arbeit „zur Theorie der Sichtmessung“[1]) ist bereits untersucht worden, wie man bei der Berechnung der Lufttrübung und der Sicht aus den Beobachtungen mit dem Sichtmesser die Tatsache zu berücksichtigen hat, daß die Trübung des im Meßgerät verwendeten Mattglases physikalisch auf andere Weise zustandekommt als die Trübung der Luft bei dunstigem und nebeligem Wetter. Die Lufttrübung ändert sich mit der Schichtdicke nach einem anderen Gesetze als die Mattglastrübung mit der Anzahl der aufeinandergelegten, gleich getrübten Mattgläser. Diese Tatsache äußert sich praktisch in folgendem:

Nach den Beobachtungen mit dem Sichtmesser wurde anfangs[2]) folgende Definition der Sicht $S$ gegeben:

$$S = \frac{l}{a_m - a},$$

mit Zugrundelegung der Annahme, daß sich die Trübung der Luft bis zu dem Grade des Verschwindens nicht selbstleuchtender Objekte proportional der Schichtdicke $l$ ändert, und daß die Trübungsskala des Mattglases im Sichtmesser einen der Lufttrübungsänderung angepaßten Maßstab darstellt; die Sicht $S$ wurde gleichgesetzt dem reziproken Wert des optischen Trübungsgrades der Luft für die Zielentfernung $l = 1$. $a$ bedeutet die eingestellte Sichtmessertrübung, $a_m$ den konstanten maximalen Trübungswert, so daß $(a_m - a)$ das Maß der Lufttrübung für die Zielentfernung $l$ und $\frac{a_m - a}{l}$ die Lufttrübung für $l = 1$ ist. Es müßte sich danach bei gleichem Zustand der getrübten Luft für verschieden entfernte Ziele derselbe $S$-Wert ergeben.

Spätere Beobachtungen mit Objekten von großen Entfernungsunterschieden zeigten jedoch, was bereits aus den ersten Sichtmessungen andeutungsweise hervorgegangen war, daß das entferntere Ziel stets einen größeren Wert für $S$ ergibt als das nähere Ziel. Die Formel wird also der Forderung strenger Gültigkeit nicht gerecht. Daraus ist der Schluß zu ziehen, daß der mit dem Sichtmesser gemessene Trübungsgrad der Luft in anderer Weise auf die Einheit der Zielentfernung zu reduzieren sei, um dann durch seinen reziproken Wert ein von der Zielentfernung unabhängiges Sichtmaß zu ergeben. Wie dies zu geschehen hat, wurde empirisch durch Sichtmessungen untersucht. Als Objekte dienten Ziele, deren Entfernung vom Beobachter um ein Vielfaches der Entfernung des nächsten Zieles variierte bis zum Verhältnis 1 : 10.

Der Einfluß der Beleuchtungsrichtung konnte, sofern er nicht bei bedecktem Himmel wegfiel, ausgeschaltet werden durch passende Wahl von Zielen in nahe gleicher Blickrichtung. War die Anzahl der Ziele in diesen Fällen zu gering, so änderte der Beobachter möglichst schnell seinen Standort in der Zielrichtung und variierte so die Entfernung. Da jedoch bei dem Standwechsel mit einer möglichen zeitlichen Änderung der Sicht gerechnet werden mußte, wurde zur Nachprüfung am Schluß der Beobachtungsreihe auf dem ersten Standpunkte nochmals gemessen.

Die individuelle Zielbeschaffenheit, die weiterhin als beeinflussender Faktor auftreten kann, ließ sich weitgehend ausschalten durch passende Auswahl der Ziele, indem bei Nebel und starkem Dunst Telegraphenstangen oder die gleichartigen Masten einer Überlandleitung oder einer Seilbahn genommen wurden, wobei allerdings der Änderung der Zielgröße mit der Entfernung Rechnung zu tragen war. Bei schwächerem Dunst und klarer Luft waren die Ziele Türme, Schornsteine und Windmühlen von nahezu gleicher scheinbarer Größe und Färbung. Die Ziele wurden stets so anvisiert, daß sie als Hintergrund den Himmel hatten. Danach gab also die wechselnde Witterungslage mit ihrer verschiedenen Sichtweite eine wechselnde Auswahl in den Zielen.

Bei einer Einzelbeobachtung wurde der Sichtmesser durchschnittlich dreimal eingestellt. Im ganzen waren es rund 30 Versuchsreihen bei verschiedensten Graden der Lufttrübung von klarer Fernsicht mit nur geringer Dunststärke bis zu dichtem Nebel (Wassernebel), mit durchschnittlich 7 Zielentfernungen für jede Reihe. Einige Reihen mußten von der weiteren Verwertung ausgeschlossen werden, weil die Trübung offenkundig örtlich inhomogen verteilt war (Schwadenbildung) oder sich zeitlich schnell änderte.

Durchweg stellte sich nun bei Benutzung der $S$-Formel mit wachsender Zielentfernung ein gleichzeitiges Wachsen des $S$-Wertes heraus. Wenn das in einzelnen Fällen für nahe benachbarte Ziele einer Reihe nicht eintrat, so konnte die Ursache dafür stets in lokalen Anomalien der Lufttrübung oder in abweichender Beschaffenheit der Ziele festgestellt werden. Stellt man die Sicht $S$ als Funktion der Zielentfernung $l$ graphisch dar, so hat die $S$-Kurve einen ansteigenden Verlauf, der bei Dunst etwas steiler liegt als bei Nebel. Die oberen Kurven der Fig. 1 u. 2 zeigen je zwei Beispiele für Nebel und schwachen Dunst.

1) A. Wigand, Physik. Zeitschr. **23**, 277, 1922.
2) A. Wigand, Physik. Zeitschr. **20**, 151, 1919.

Es besteht daher die Aufgabe, die Berechnung der Beobachtungen so auszuführen, daß man einen konstanten, von der Zielentfernung unabhängigen Sichtwert erhält. Das wurde erreicht mit einer zur alten Sichtformel hinzugefügten Korrektion, die einen horizontalen Sichtkurvenverlauf hervorruft (untere Kurven der Fig. 1 u. 2), und für die, im Einklang mit theoretischen Überlegungen über die Ursache der Erscheinung, nach Versuchen mit einigen anderen Ansätzen die folgende einfache Form gefunden wurde. Der korrigierte Sichtwert ist:

$$S_\sigma = \frac{l}{a_m - a} - \sigma l = l\left(\frac{1}{a_m - a} - \sigma\right).$$

Die Berechnung der Korrektionskonstanten $\sigma$ geschah, mit Zugrundelegung des Wertes 14,3 für die Apparatkonstante $a_m$, indem man die Beobachtungen einer Reihe zu je zweien kombinierte und $S_\sigma$ für die beiden verschiedenen Werte von $l$ und $a$ gleichsetzte:

$$S_\sigma = \frac{l_1}{a_m - a_1} - \sigma l_1 = \frac{l_2}{a_m - a_2} - \sigma l_2.$$

Führt man nach der alten $S$-Formel:

$$\frac{l_2}{a_m - a_2} = S_2 \text{ und } \frac{l_1}{a_m - a_1} = S_1$$

ein, so ist:

$$\sigma = \frac{S_2 - S_1}{l_2 - l_1}.$$

Bei der Berechnung von $\sigma$ aus der Gesamtheit der Beobachtungen wurden solche Kombinationen als zu ungenau außer Betracht gelassen, bei denen die Entfernungsdifferenz kleiner war als 10 Proz. des $l_1$-Wertes. Außerdem blieben Versuche mit $a$-Werten größer als 12 wegen zu geringer Meßgenauigkeit für den Wert von $(a_m - a)$ unberücksichtigt.

Da man es mit der $\sigma$-Korrektur erreicht, daß der Sichtwert $S_\sigma$ praktisch unabhängig wird von der Zielentfernung, so kann man einen

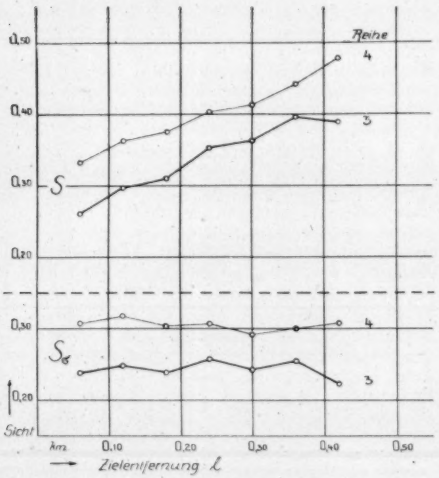



Fig. 1.

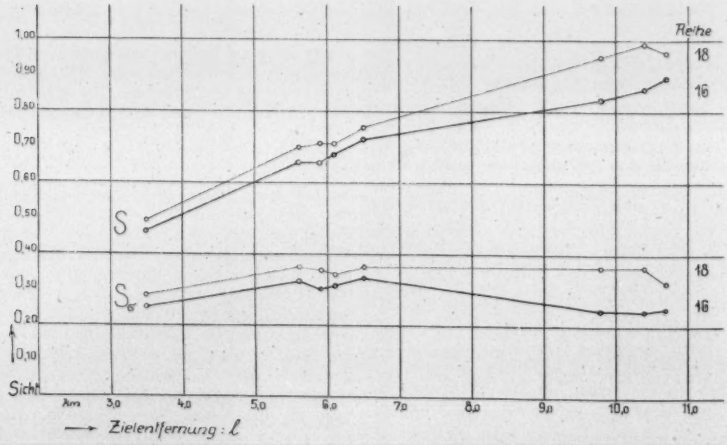



Fig. 2.

Tabelle I.

Bestimmung der $\sigma$-Korrektur für Nebel.

| Reihe | Art der Ziele | Zielentfernung kleinste km | Zielentfernung größte km | Anzahl der Einzel-$\sigma$ | $S\sigma$-Mittel mit dem $\sigma$-Gesamtmittel | $\sigma$-Reihenmittel |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Telegraphenstangen (Holz) | 0,025 | 0,205 | 10 | 0,015 | 0,039 |
| 2 | " | 0,052 | 0,180 | 6 | 0,015 | 0,047 |
| 3 | Holzmasten der Überlandleitung | 0,060 | 0,420 | 21 | 0,0242 | 0,038 |
| 4 | " | 0,060 | 0,420 | 21 | 0,0305 | 0,038 |
| 5 | " | 0,150 | 0,530 | 27 | 0,034 | 0,029 |
| 6 | " | 0,149 | 0,572 | 35 | 0,038 | 0,040 |
| 7 | " | 0,090 | 0,530 | 35 | 0,041 | 0,047 |
| 8 | " | 0,060 | 0,500 | 35 | 0,041 | 0,036 |

Gesamtmittel: 0,039 (rund 0,04)
Mittlerer Fehler: $\pm$ 0,002

Tabelle II.

Bestimmung der $\sigma$-Korrektur für Dunst.

| Reihe | Art der Ziele | Zielentfernung kleinste km | Zielentfernung größte km | Anzahl der Einzel-$\sigma$ | $S\sigma$ Mittel mit dem $\sigma$-Gesamtmittel | $\sigma$-Reihenmittel |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | Eisenmasten der Überlandleitung | 0,20 | 1,80 | 26 | 0,035 | 0,065 |
| 10 | Eisenmasten der Drahtseilbahn | 0,13 | 0,98 | 53 | 0,041 | 0,075 |
| 11 | Häuser und Türme | 1,00 | 2,60 | 8 | 0,096 | 0,045 |
| 12 | Turm | 0,50 | 2,60 | 28 | 0,102 | 0,066 |
| 13 | Schornstein und Türme | 1,30 | 5,80 | 10 | 0,137 | 0,048 |
| 14 | Windmühle und Türme | 3,50 | 10,70 | 20 | 0,199 | 0,046 |
| 15 | Schornstein und Türme | 0,40 | 4,70 | 26 | 0,241 | 0,046 |
| 16 | Windmühle und Türme | 3,50 | 10,70 | 20 | 0,282 | 0,055 |
| 17 | " | 3,50 | 10,70 | 20 | 0,288 | 0,053 |
| 18 | " | 3,50 | 10,70 | 20 | 0,346 | 0,067 |
| 19 | Türme | 5,80 | 16,00 | 1 | 0,360 | 0,056 |
| 20 | " | 3,30 | 13,50 | 1 | 0,650 | 0,065 |

Gesamtmittel: 0,061 (rund 0,06)
Mittlerer Fehler: $\pm$ 0,003

Mittelwert $S_\sigma$ für sämtliche Zielentfernungen einer Versuchsreihe angeben.

Die noch bestehenbleibenden Schwankungen um den so berechneten Mittelwert von $S_\sigma$ beruhen auf zwei Ursachen: Erstens können, ohne daß man es direkt mit dem Auge wahrnimmt, Unregelmäßigkeiten der Dunst- und Nebeldichte vorliegen, sowohl örtliche (Schwadenbildung) wie auch während der Dauer der Messungen auftretende zeitliche; zweitens zeigt mitunter die Beschaffenheit der Ziele individuelle Unterschiede, so daß einzelne Ziele wegen verschiedener Form, Größe oder Färbung ceteris paribus besser oder schlechter erkennbar sind als die normalen Ziele. Im ersteren Falle sind die $S_\sigma$-Schwankungen reell und stellen neben dem $S_\sigma$-Mittelwert ein für die Sicht charakteristisches Messungsergebnis dar, nämlich den Betrag der örtlichen oder zeitlichen Veränderlichkeit (vgl. die systematische Schwanknng der Nebelkurven in Fig. 1). Im zweiten Falle handelt es sich um eine der Methode anhaftende Unvollkommenheit, die man durch Auswahl möglichst gleichartiger Ziele weit herabsetzen, aber doch nicht immer so ganz ausschalten kann, daß sie nicht gelegentlich zu eben merklichen Fehlern führte. Wie diese Fehler beseitigt werden können, indem man für solche abnormen Ziele der individuellen Zielbeschaffenheit durch eine Korrektion Rechnung trägt, wird im nächsten Abschnitt näher untersucht.

Die Ergebnisse der 20 Versuchsreihen mit konstanter Lufttrübung für jede Reihe sind in den Tabellen I und II zusammengestellt; die Beobachtungen bei klarer Luft mit nur schwachem Dunst gehören zu denen für stärkeren Dunst. Die Fig. 1 und 2 zeigen je zwei einzelne Reihen für Nebel und Dunst.

Die Reihenmittelwerte von $\sigma$ wurden zu je einem Gesamtmittel für Nebel und für Dunst vereinigt. Das geschah, indem entsprechend der Anzahl der zur $\sigma$-Berechnung verwendeten

Kombinationen einer Reihe den Mittelwerten der Reihen verschiedenes Gewicht beigelegt wurde zur Bildung des Gesamtmittelwertes aller Reihen. Auch der unter den Tabellen angegebene „mittlere Fehler", der für die Abweichungen der Reihenmittel vom Gesamtmittel gilt, ist mit Berücksichtigung dieser Gewichte berechnet.

Der physikalische Sinn der $\sigma$-Korrektur ist die Kompensation des Einflusses, den der zu Anfang dieses Abschnittes erwähnte Unterschied der Trübungsgesetze für Mattglas und getrübte Luft bei der Sichtmessung ausübt. Die theoretische Überlegung[1]) ergab, da für beide Medien die Trübung nicht linear und gleichartig, sondern nach anderen und verschiedenen Gesetzen mit der Schichtdicke zunimmt, daß man die mit dem Sichtmesser gemessene Trübungszahl $a$ um einen bestimmten Betrag verkleinern muß, um mit der auf der Annahme der Linearität beruhenden einfachen $S$-Formel rechnen zu können. Die $S_\sigma$-Formel leistet diese $a$-Korrektion mit hinreichender Genauigkeit. Schreibt man diese $S_\sigma$-Formel:

$$S_\sigma = l\left(\frac{1}{a_m - a} - \sigma\right),$$

so sieht man, daß die $\sigma$-Korrektur darin besteht, daß der Betrag von $\frac{1}{a_m - a}$ um den Wert der positiven Konstante $\sigma$ verkleinert wird; das entspricht einer Vergrößerung von $(a_m - a)$ und, da $a_m$ konstant ist, einer Verkleinerung von $a$ um einen von $a$ selbst abhängigen Betrag.

Zieht man den im nächsten Abschnitt untersuchten Einfluß in Betracht, den die Änderung der Zielgröße auf die Sichtmessung ausübt, so ändert sich der $\sigma$-Wert für die Reihen, innerhalb deren ein Ziel von gleicher wirklicher Größe aus verschiedenen Entfernungen anvisiert wird, also verschieden groß erscheint; es sind das sämtliche Nebelreihen (Tab. I, Fig. 1) und für Dunst (Tab. II) die Reihen 9, 10, 12, während für die übrigen Dunstreihen die Zielgrößen annähernd normal sind. Wird als „normal" die Größe von 0,34° zugrunde gelegt, so ergibt die Anbringung der Zielgrößenkorrektion $a_\beta$ (siehe den folgenden Abschnitt) fast durchweg eine Vergrößerung des $\sigma$-Wertes.

So berechnet sich, wenn man bei den Nebelversuchen eine Stangengröße von 3 m frei über dem Horizont einsetzt, für:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Reihe 1 | $\sigma = 0{,}062$ | statt | 0,039, |
| „ 2 | $\sigma = 0{,}063$ | „ | 0,047, |
| „ 3 | $\sigma = 0{,}058$ | „ | 0,038, |
| „ 4 | $\sigma = 0{,}071$ | „ | 0,038. |

1) A. Wigand, Physik. Zeitschr. **23**, 277, 1922.

Dadurch erreicht der Mittelwert von $\sigma$ für Nebel bei normaler Zielgröße den $\sigma$-Wert für Dunst von 0,06.

Bei den Versuchsreihen für Dunst mit variabler Zielgröße ergibt die Anbringung der Zielgrößenkorrektion mit Annahme einer Mastengröße von 6 m (Reihe 9 und 10) und einer Turmhöhe von 10 m über dem Horizont (Reihe 12 mit Variierung des Standortes) für:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Reihe 9 | $\sigma = 0{,}060$ | statt | 0,065, |
| „ 10 | $\sigma = 0{,}085$ | „ | 0,075, |
| „ 12 | $\sigma = 0{,}094$ | „ | 0,066. |

Hierdurch würde der Mittelwert von $\sigma$ für Dunst bei normaler Zielgröße auf rund 0,065 erhöht werden. Die Genauigkeit, wie sie durch die Abweichungen der einzelnen Reihenwerte für $\sigma$ vom Mittel angezeigt wird, ist jedoch infolge der objektiven räumlichen und zeitlichen Trübungsschwankungen der Luft nicht so groß, daß man nicht zur Vereinfachung der Rechnungen mit dem runden Wert $\sigma = 0{,}06$ rechnen dürfte.

Man ist daher berechtigt, bei Sichtmessungen mit gleicher, annähernd normaler Zielgröße von etwa 0,34° für alle Grade der Lufttrübung von Nebel über Dunst bis zu klarer Luft gemeinsam $\sigma = 0{,}06$ zu setzen. Die Sicht $S_\sigma$ ist also zu berechnen nach der Formel:

$$S_\sigma = l \cdot \left(\frac{1}{14{,}3 - a} - 0{,}06\right).$$

Da der Sichtwert $S_\sigma$ definitionsgemäß die Dimension einer Länge hat, ist er unmittelbar das Maß der Sichtweite. Man versteht unter „Sichtweite" seit langem in der meteorologischen und nautischen Praxis diejenige Entfernung, in der ein Ziel gerade noch erkennbar ist, gemessen in Kilometern oder Seemeilen. Soll ein Ziel von der Entfernung der Sichtweite mit dem Sichtmesser zum Verschwinden gebracht werden, so wird man nur das Mattfilter vom Trübungsgrad 1 vorzuschalten haben, also $a = 1$ einstellen. In die $S_\sigma$-Formel ist daher $a = 1$ und für $l$ die Sichtweite $L$ einzusetzen. Je nachdem man bei den Sichtmessungen als Einheit für die Zielentfernung $l$ Kilometer oder Seemeilen zugrunde legt, bekommt man auch die Sichtweite $L$ in Kilometern oder Seemeilen. Es ist also:

$$S_\sigma = L \cdot \left(\frac{1}{a_m - 1} - \sigma\right) = L \cdot \left(\frac{1}{14{,}3 - 1} - 0{,}06\right)$$
$$= L \cdot (0{,}075 - 0{,}06) = 0{,}015 \cdot L.$$

Daraus folgt die Sichtweite:

$$L = \frac{S_\sigma}{0{,}015} = 66 \cdot S_\sigma.$$

Vorausgesetzt ist für die Brauchbarkeit dieser Formel, daß zur Bestimmung von $S_a$ Ziele mit annähernd normaler Größe (0,34°) benutzt werden; dann kann man bei Nebel, Dunst und klarer Luft aus einer Messung mit dem Sichtmesser an einem näheren, gut sichtbaren Ziele die Sichtweite nach der $L$-Formel angeben.

Will man sich die Umrechnung von $S_a$ in $L$ ersparen, so kann man dies durch andere Bezifferung der Trübungsskala des Sichtmessers und entsprechende Änderung der Konstanten $a_m$ und $\sigma$ erreichen, so daß dann der nach der Sichtmesserformel berechnete Sichtwert sofort die Sichtweite darstellt. Bezeichnen wir die so veränderten Werte von $S_a$, $a_m$, $a$ und $\sigma$ mit $S_a'$, $a_m'$, $a'$ und $\sigma'$, so folgt aus der Formel:

$$L = 66 \cdot S_a = 66 \cdot l \cdot \left( \frac{1}{a_m - a} - \sigma \right) =$$

$$= l \cdot \left( \frac{1}{\frac{a_m}{66} - \frac{a}{66}} - 66 \cdot \sigma \right) :$$

$$S_a' = 66 \cdot S_a = L,$$

$$a_m' = \frac{a_m}{66} = \frac{14{,}3}{66} = 0{,}216,$$

$$a' = \frac{a}{66} = 0{,}015 \cdot a,$$

$$\sigma' = 66 \cdot \sigma = 66 \cdot 0{,}06 = 4{,}0.$$

Die Einerstufe der gewöhnlichen Sichtmesserskala hat also nach dieser anderen Bezifferung den Wert 0,015, und die Sichtweite $L$ wird:

$$L = l \cdot \left( \frac{1}{0{,}216 - a'} - 4{,}0 \right).$$

Die vorstehenden Beobachtungsreihen sind durchweg nicht ganz bis zu solchen Zielentfernungen, die an der Grenze der Erkennbarkeit liegen, durchgeführt worden. Für einige Reihen, deren größte Zielentfernung dieser Grenze nahekommt, ergibt die Berechnung nach der $L$-Formel durchaus plausibele Werte für die Sichtweite bei Nebel, Dunst und klarer Luft.

### 3. Einfluß der Größe des Ziels.

Als individuelle Zieleigenschaften sind anzusprechen im besonderen die Größe, Form und Farbe des Zieles. Sie verursachen Unterschiede in der Einstellung des Sichtmessers und zwingen somit zu besonderer Berücksichtigung. Wie dies zu geschehen hat, wurde durch einige Versuchsreihen festgestellt, die sich auf den wichtigsten dieser Einflüsse, die Zielgröße, bezogen. Da die Arbeiten auf die Untersuchung der Vertikalsicht mit Hilfe von Pilotballonen hinzielten, waren als Objekte solche Ballone und ihnen ähnliche Gegenstände zu wählen.

#### a) Papierballone.

Bei Pilotballonaufstiegen werden in Deutschland zurzeit hauptsächlich Papierballone von gleicher Größe, Form und Rotfärbung verwendet. Form und Farbe ändern sich im Verlauf eines Aufstieges nicht; wohl aber nimmt die scheinbare Größe des Pilotballons während eines Aufstieges in weiten Grenzen ab.

In der ersten Abhandlung über die Sichtmessung[1]) wurde als günstigste Größe des Ziels 0,2°—0,5° Höhe und Breite angegeben. Damit ist bereits eine als normal anzusehende Zielgröße festgelegt.

Zur Klärung der Frage, wie die Einstellung des Sichtmessers durch Veränderung der Zielgröße beeinflußt wird, wurden 7 mit rotem Pilotballonpapier bezogene Kreisscheiben in verschiedener Größe hergestellt und in einer Entfernung von 1,3 km vor dem freien Himmel als Hintergrund anvisiert. Dazu diente ein Bambergscher Ballontheodolit von 17facher Fernrohrvergrößerung mit einem Stufensichtmesser vor dem Objektiv. Die Größe der Scheiben war so gewählt, daß jede folgende Scheibe halb so großen Flächeninhalt hatte wie die vorhergehende. Die größte Scheibe Nr. 1 war von der Größe eines Pilotballons mit 1,20 m Durchmesser.

Die Beobachtungen an 2 Tagen mit genau gleicher Sicht und gleicher Zielentfernung ergaben die in Tabelle III mitgeteilten 6 Versuchsreihen für die mit dem Theodolit-Sichtmesser eingestellten Werte des Trübungsgrades $a_f$. Diese Werte sind in der Tabelle einzeln angegeben und lassen in ihrer Übereinstimmung für jede Scheibe den Genauigkeitsgrad erkennen, mit dem der Sichtmesser auch bei verschiedenen Beobachtern arbeitet.

In der Tabelle steht neben dem Durchmesser der Scheiben ihre in dem 17fach vergrößernden Fernrohr erscheinende Größe sowie die Entfernung, aus der ein Pilotballon von 1,20 m Durchmesser gleich groß wie die betreffende Scheibe erscheinen würde.

Fig. 3 zeigt die graphisch ausgeglichene Kurve der beobachteten Abhängigkeit des $a_f$-Wertes von der Zielgröße. Die Anzahl der Kreise um die eingetragenen Punkte gibt die Zahl der für sie beobachteten Einzelwerte an.

Die Kurve verläuft für große Ziele nahezu horizontal und nähert sich dem konstanten Grenzwert $a_f = 4{,}95$. Nach unten für kleine Ziele wurde sie durch den Punkt $a_f = 0$ bei der Zielgröße von 60″ extrapoliert, in der Überlegung, daß ein Ziel von der Größe einer Winkelminute normalerweise die physiologische Grenze der Erkennbarkeit für das Auge darstellt, wo-

1) A. Wigand, Physik. Zeitschr. **20**, 152, 1919.

Tabelle III.

| Nr. | Scheibe Durchmesser | Scheinbare Größe mit Fernrohr (Winkelsekunden) | Reihennummer / Beobachter / Korrespondierende Ballonentfernung | 1 G. | 2 W. | 3 G. | 4 G. | 5 G. | 6 G. | Mittel |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $a_f$-Werte des Sichtmessers | | | | | | |
| 1 | 1.20 m | 3'30" | 1,30 km | 5,0 | 4,5 | 4,5 | 5,0 | 5,0 | | 4,8 |
| 2 | 0,85 „ | 2295" | 1,85 „ | 5,0 | 4,5 | 4,5 | 4,5 | 4,5 | | 4,9 |
| 3 | 0,60 „ | 1615" | 2,60 „ | | 4,0 | 4,5 | 4,5 | | | 4,3 |
| 4 | 0,42 „ | 1156" | 3,64 „ | 3,0 | 3,25 | 3,5 | 3,5 | 3,5 | 3,5 | 3,4 |
| 5 | 0,30 „ | 816" | 5,16 „ | | 2,5 | 3,0 | 2,75 | 2,75 | 3,0 | 2,8 |
| 6 | 0,21 „ | 578" | 7,28 „ | | | | 2,25 | 2,5 | 2,5 | 2,4 |
| 7 | 0,15 „ | 408" | 10,31 „ | | | | 1,5 | 1,75 | 1,5 | 1,6 |
| 2 | Kontrollmessungen | | | | | 4,5 | | | | |
| 3 | | | | | | | | | 3,5 | |

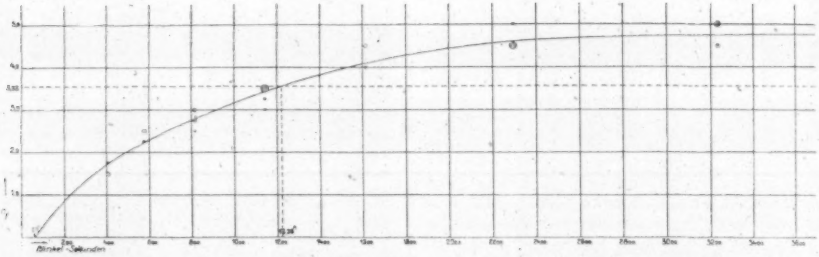


Fig. 3.

durch der zur Einstellung auf Verschwinden des Zieles im Sichtmesser erforderliche Trübungsgrad gleich Null wird.

Die Beobachtungen ergeben also eine Zunahme von $a_f$ mit der Zielgröße als Folge der Tatsache, daß ein Ziel um so deutlicher erkennbar ist, je größer es ist. Es muß daher, um das Ziel im Sichtmesser zum Verschwinden zu bringen, ceteris paribus ein desto höherer Trübungsgrad $a_f$ eingeschaltet werden, je größer das Ziel ist. Läßt man diesen Größeneinfluß des Ziels unberücksichtigt, so nimmt der berechnete Sichtwert mit der Zielgröße zu, statt unabhängig davon konstant zu bleiben.

Da sich für die Sichtmesserbeobachtungen eine mittlere Zielgröße von $0{,}2^0$—$0{,}5^0$ als am günstigsten erwiesen hat, wurde eine solche willkürlich als „normal" eingeführt und auf $0{,}34^0 = 1220''$ festgelegt. Der dieser Zielgröße zugehörige $a$-Wert des Sichtmessers (im Falle unserer Beobachtungen $a_f = 3{,}55$) wird daher bei allen Trübungsgraden der Luft als ungestört angesehen. Weicht die Zielgröße vom Normalwert $0{,}34^0$ nach oben oder unten ab, so ist eine aus den Beobachtungen der Tabelle III nach der Kurve der Fig. 3 zu gewinnende Korrektion an dem beobachteten $a$-Wert anzubringen. Zwar wurden die $a_f$-Werte der Tabelle III nur bei einem bestimmten Trübungsgrad der Atmosphäre gewonnen; es unterliegt jedoch keinem Zweifel, daß die Abweichung dieser $a_f$-Werte von dem für die normale Zielgröße gefundenen $a_f$-Wert auch für die Sichtmessereinstellungen bei allen anderen Trübungsgraden der Luft gültig ist. Denn da man stets auf Verschwinden des Ziels im Sichtmesser einstellt, und da die Mattglasskala des Sichtmessers linear ist hinsichtlich der Anzahl der aufeinander gelegten, gleichgetrübten Einheits-Mattgläser, so ist es für den Einfluß der Zielgröße auf die Messung gleichgültig, ob der sich aus Lufttrübung und Filtertrübung additiv zusammensetzende Maximalwert $a_m$ für das Verschwinden des Ziels mehr oder weniger Lufttrübung enthält.

Wir nehmen daher nach der Kurve der Fig. 3 die Werte der Abweichung von dem zur normalen Zielgröße gehörigen $a_f$-Werte mit Umkehrung des Vorzeichens allgemein als Zielgrößenkorrektion $a_g$ und fügen diese dem beobachteten $a$-Wert (bzw. $a_f$ Wert bei Fernrohrbenutzung) als additive Konstante hinzu.

Die Tabelle IV enthält für den praktischen Gebrauch des vorkommenden Bereichs die zu-

Tabelle IV.

| Zielgröße Winkelsekunden | Ballonentfernung $l$ km | Zielgrößenkorrektion $a_\beta$ | Zielgröße Winkelsekunden | Ballonentfernung $l$ km | Zielgrößenkorrektion $a_\beta$ | Zielgröße Winkelsekunden | Ballonentfernung $l$ km | Zielgrößenkorrektion $a_\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21039 | 0,2 | — 1,40 | 842 | 5,0 | + 0,7 | 351 | 12,0 | + 2,0 |
| 10518 | 0,4 | — 1,35 | 765 | 5,5 | + 0,9 | 337 | 12,5 | + 2,05 |
| 7013 | 0,6 | — 1,30 | 701 | 6,0 | + 1,0 | 324 | 13,0 | + 2,1 |
| 5260 | 0,8 | — 1,25 | 647 | 6,5 | + 1,1 | 301 | 14,0 | + 2,2 |
| 4208 | 1,0 | — 1,20 | 601 | 7,0 | + 1,2 | 281 | 15,0 | + 2,3 |
| 3366 | 1,25 | — 1,15 | 561 | 7,5 | + 1,3 | 263 | 16,0 | + 2,4 |
| 2805 | 1,5 | — 1,10 | 526 | 8,0 | + 1,4 | 248 | 17,0 | + 2,5 |
| 2404 | 1,75 | — 1,05 | 495 | 8,5 | + 1,5 | 234 | 18,0 | + 2,55 |
| 2104 | 2,0 | — 0,9 | 468 | 9,0 | + 1,6 | 221 | 19,0 | + 2,60 |
| 1683 | 2,5 | — 0,6 | 443 | 9,5 | + 1,7 | 210 | 20,0 | + 2,65 |
| 1403 | 3,0 | — 0,3 | 421 | 10,0 | + 1,8 | 200 | 21,0 | + 2,70 |
| 1202 | 3,5 | + 0,0 | 401 | 10,5 | + 1,85 | 191 | 22,0 | + 2,75 |
| 1052 | 4,0 | + 0,3 | 383 | 11,0 | + 1,9 | 183 | 23,0 | + 2,80 |
| 935 | 4,5 | + 0,5 | 366 | 11,5 | + 1,95 | | | |

sammengehörigen Werte der Zielgrößenkorrektion $a_\beta$ und der Zielgröße sowie Ballonentfernung von Papierpilotballonen mit 1,20 m Durchmesser bei Verwendung eines 17fach vergrößernden Fernrohres.

Ist der hier eingeschlagene Weg zur Ausschaltung des Einflusses der Zielgröße richtig, so muß sich für Beobachtungen des gleichen Ziels bei gleicher Sicht mit und ohne Fernrohr nach Anbringung der $a_\beta$-Korrektur der gleiche Wert für $a$ ergeben. Die Erfüllung dieser Forderung sowie die Berechtigung zur allgemeinen Verwendung der bei einer bestimmten Lufttrübung gefundenen $a_\beta$-Werte auch bei anderen Werten der Lufttrübung wurde durch 3 weitere Versuchsreihen mit 19 Einzelbeobachtungen nachgeprüft. Dazu verwendeten wir die größte der Scheiben (Nr. 1) an 2 Tagen teils mit derselben Sicht wie bei den vorigen Versuchen, teils mit einer um 1,2 Filtereinheiten größeren Sicht. Es ergab sich, daß die mit und ohne Fernrohr im Sichtmesser eingestellten und entsprechend der Zielgröße korrigierten $a$-Werte im Mittel um nur 0,25 voneinander abwichen, eine durchaus befriedigende Übereinstimmung. Hierbei wurde für die Beobachtung mit dem Fernrohr der (im nächsten Abschnitt bestimmte) Wert der Fernrohrtrübung $a_{opt} = 5{,}85$ benutzt und dem mit Fernrohr plus Sichtmesser eingestellten Werte von $a_f$ hinzugefügt.

Als Beispiel eine Einzelbeobachtung (Tab. V):

Tabelle V.

| | mit Fernrohr $a_{opt} = 5{,}85$ | ohne Fernrohr |
|---|---|---|
| Zielgröße | 3230″ | 190″ |
| $a_\beta$ | — 1,15 | + 2,75 |
| $a$ beobachtet | $a_f = 6{,}0$ | $a' = 8{,}0$ |
| $a$ korrigiert | $a_f + a_{opt} + a_\beta = 10{,}70$ | $a' + a_\beta = 10{,}75$ |

b) Gummiballone.

Bei der Benutzung von Gummiballonen zur Vertikalsichtmessung äußert sich der Einfluß der veränderlichen Zielbeschaffenheit in anderer und komplizierterer Weise als bei Papierballonen. Gummiballon und Papierballon unterscheiden sich rein stofflich so, daß die Hülle des letzteren den Charakter der vollen Undurchsichtigkeit trägt, jener aber schon im Stadium der Füllung durchscheinend wird und mit wachsender Größe beim Steigen mehr und mehr an Durchsichtigkeit zunimmt; darin liegen schon zwei grundverschiedene Bedingungen für die Leuchtkraft der Ballone. Ein Papierballon gibt durch die diffuse Reflexion ein intensives volles Rot, gleichmäßig über seine ganze matte Oberfläche, während die glänzende Oberfläche des Gummiballons bei Sonnenschein einen grellen Reflex des Sonnenlichtes in das Beobachtungsinstrument spiegeln kann und nur an den Randteilen diffuses Rot trägt. Eine weitere Tatsache ist die, daß der Gummiballon anfänglich eine braunrote Färbung hat und diese zugunsten des Rot ändert, je weitere Ausdehnung er annimmt. Dieser Wechsel der Farbe kann zudem, je nach dem Steigwert, den man dem Ballon gibt, in verschiedenen Höhen eintreten. Besonders bei Beleuchtung durch die Sonne treten solche Ungleichmäßigkeiten markant hervor. Auch Wegener und Kuhlbrodt[1]) berichten über diese Tatsachen; sie sprechen von zwei Stadien, dem braunroten in niederen Höhen und dem leuchtend hellen in den Höhen über 3000 m. Beim Übergang von einem Stadium in das andere geht der Ballon sogar leicht verloren. Solche Erscheinungen machen natürlich die Sichtbeobachtung kompliziert. Bei abgedeckter Sonne liegen die Dinge einfacher. Dann aber ist ja

1) A. Wegener und E. Kuhlbrodt, Archiv der Deutschen Seewarte **40**, Nr. 4, 1922.

die Verfolgungsweite des Ballons beschränkt durch die Wolkendecke. Dem Gummiballon sollte aber gerade die Aufgabe zufallen, größere Höhen der Sichtmessung aufzuschließen.

Was die Form des Gummiballons betrifft, so kann ihre Konstanz bei gutem Gummi schon gewährleistet werden. Immerhin muß man die Ballone darauf bei der Füllung besonders prüfen, damit sie nicht wegen Ungleichmäßigkeit des Gummis in größerer Höhe bei stärkerer Ausdehnung deformiert werden, wodurch auch ein die Sichtmessung beeinflussendes, ständiges Schwanken und frühzeitiges Platzen verursacht werden kann.

Da beim Papierballon das Füllgas bei innerem Überdruck durch die Hülle entweichen kann, wird seine Größe während des ganzen Aufstiegs erhalten. Beim fest abgeschlossenen Gummiballon ist eine Diffusion des Gases nach außen nicht möglich. Daher nimmt dieser Ballon an Größe zu bei Abnahme der äußeren Luftdichte. Dehnt er sich gleichmäßig nach allen Richtungen aus, so behält er seine Kugelgestalt. Für die Sichtmessung hätte man dieser Größenänderung neben der durch die Zunahme der Entfernung bedingten Abnahme der scheinbaren Größe Rechnung zu tragen. Da sich das Volumen des Ballons umgekehrt proportional dem in seiner Höhe herrschenden Luftdruck $b$ ändert, hat man für den Durchmesser des Ballons Proportionalität mit $b^{-1/3}$, woraus sich mit seiner Entfernung die scheinbare Größe ergibt.

In der Geeignetheit für die Sichtmessung steht also der Gummiballon hinter dem Papierballon zurück. Die angeführten komplizierenden Einflüsse wären bei Verwendung von Gummipiloten zu berücksichtigen, was bisher noch nicht geschehen ist, da wir nur wenige Höhensichtmessungen mit Gummipiloten ausgeführt haben und die Ergebnisse mit Papierpiloten befriedigend waren.

### 4. Einfluß der Verwendung eines Fernglases mit dem Sichtmesser.

Um kleine Ziele besser erkennen zu können, verwendet man zweckmäßig ein Fernglas zusammen mit dem Sichtmesser. Behält man diesen am Auge und schaltet das Fernglas zwischen Sichtmesser und Ziel, so wird wegen der dadurch verringerten Beleuchtung der Mattgläser deren vorwiegend auf der Lichtzerstreuung beruhende Trübung[1]) verkleinert, und man erhält einen erheblich höheren $a$-Wert als ohne Fernrohr, so daß die vorhandene $a$-Skala nach oben nicht ausreicht. Schaltet man andererseits den Sichtmesser zwischen Fernglas und Ziel, so wird zwar auch hierbei der $a$-Wert verändert, nämlich verkleinert; doch ist diese Veränderung nicht so beträchtlich, daß man mit der üblichen $a$-Skala des Sichtmessers nicht auskäme. Dies Verfahren verdient also den Vorzug, zumal es auch für die konstruktive Ausführung der Kombination Fernglas—Sichtmesser und ihre Handhabung bequemer ist.

Bei solcher Verwendung eines Fernrohres am Auge zusammen mit dem Sichtmesser wirkt also die Fernrohroptik wie ein Mattglas von bestimmtem Trübungsgrad, den wir, nach der $a$-Skala des Sichtmessers gemessen, mit $a_{opt}$ bezeichnen. Der Grund für diesen Effekt ist zunächst die Lichtzerstreuung in den Linsen und Prismen des optischen Systems und an ihrer Oberfläche. Ferner wirken auch die Lichtverluste durch Reflexion und Absorption in der Fernrohroptik sowie eine Herabsetzung der Flächenhelligkeit des Ziels durch Pupillenverlust bei der Vergrößerung in dem Sinne, daß das Ziel weniger gut erkennbar ist, als es, unter gleichem Sehwinkel betrachtet, ohne Fernrohr wäre. Allen diesen Einflüssen zusammen wird durch den korrespondierenden Mattglastrübungswert $a_{opt}$ Rechnung getragen. Dieser Wert ist für ein bestimmtes Fernrohr eine Konstante und nimmt bei verschiedenen Ferngläsern im allgemeinen mit der Vergrößerungszahl zu (Tab. VIII).

Der Einfluß der Fernglasoptik ist bei früheren Beobachtungen[1]) nicht beachtet worden, weil er infolge der Verwendung eines sehr lichtstarken Zeißschen 6fach-Prismenglases nicht erheblich war und durch den entgegengesetzten Einfluß der Zielvergrößerung bis nahe zur Grenze der Beobachtungsfehler kompensiert wurde.

Der Unterschied der $a$-Einstellung des Sichtmessers ohne und mit Fernrohr werde mit $a_\varphi$ bezeichnet. Dann ist $a_\varphi$ gleich der Trübung der Fernrohroptik $a_{opt}$ plus der nach Tab. IV des vorigen Abschnittes zu bestimmenden Zielgrößenkorrektion $a_\beta$ für das im Fernrohr vergrößerte Ziel, wenn dieses ohne Fernrohr Normalgröße besitzt. $a_\beta$ hat stets einen negativen Zahlenwert und läßt sich ohne weiteres mit der Fernrohrvergrößerung ermitteln. Die Trübung der Fernrohroptik, gemessen nach der $a$-Skala des Sichtmessers, ergibt sich also aus solchen $a_\varphi$-Bestimmungen zu:

$$a_{opt} = a_\varphi - a_\beta.$$

Während sich $a_\varphi$ mit der Zielgröße ändern kann, hat $a_{opt}$ einen für ein bestimmtes Fernrohr konstanten Wert.

Die Frage, wie der Fernrohreinfluß bei der Sichtmessung sich geltend macht und in Rech-

1) A. Wigand, Physik. Zeitschr. **22**, 484, 1921; **23**, 277, 1922.

1) A. Wigand, Physik. Zeitschr. **20**, 151, 1919.

nung zu setzen ist, gab zu eingehenden Beobachtungen Anlaß. Als Ziele wurden wieder Objekte im Gelände mit wechselnden Entfernungen benutzt. Sie waren leicht in Normalgröße für die Untersuchungen aufzufinden und standen bei wechselnden Wetterlagen und verschiedenartigsten Sichtverhältnissen zur Verfügung.

Gleichzeitig mit den Sichtmesser-Fernrohrbeobachtungen wurde auch mit einem Sichtmesser ohne Fernrohr die Sicht gemessen und danach der Sichtwert $S_a$ berechnet. Es waren zugleich mit dem 17fach vergrößernden Theodolitfernrohr zwei Prismengläser mit 8- und 6facher Vergrößerung, jedes mit einem Sichtmesser vor dem Objektiv, in Gebrauch.

Die Beobachtungen bei verschiedener Sicht wurden für jedes Ziel tabellarisch zusammengestellt und nach steigendem $S_a$ geordnet. Das ergab dann für sieben Ziele mit Zielentfernungen von 1,3 km bis 12,3 km 7 Reihen mit zusammen 119 Einzelbeobachtungen, deren jede aus den 4 $a$-Einstellungen für die drei Ferngläser und den Sichtmesser ohne Fernglas bestand. Tabelle VI zeigt ein Beispiel einer solchen Reihe.

Tabelle VI.

Instituts-Turm – Giebichenstein-Burg ($l$ = 2,05 km).

| $S_a$ | $a$ ohne Fernglas | $a_f$ mit Fernglas | | | $a_\varphi = a - a_f$ für Fernglas | | | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6fach | 8fach | 17fach | 6fach | 8fach | 17fach | |
| 0,12 | 6,0 | 3,0 | 2,5 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 3,5 | 3 |
| 0,20 | 8,0 | 6,0 | 4,0 | 2,5 | 2,0 | 4,0 | 5,5 | 2 |
| 0,20 | 8,0 | 5,0 | 4,0 | 4,0 | 3,0 | 4,0 | 4,0 | 2 |
| 0,20 | 8,0 | 6,0 | 4,0 | 3,0 | 2,0 | 4,0 | 5,0 | 2 |
| 0,20 | 8,0 | 6,5 | 4,5 | 4,0 | 1,5 | 3,5 | 4,0 | 2 |
| 0,20 | 8,0 | 5,5 | 4,5 | 3,0 | 2,5 | 3,5 | 5,0 | 2 |
| 0,26 | 9,0 | 6,0 | 5,0 | 3,0 | 3,0 | 4,0 | 6,0 | 2 |
| 0,26 | 9,0 | 7,0 | 6,0 | 5,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 2 |
| 0,35 | 10,0 | 8,0 | 7,0 | 6,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 1 |
| 0,35 | 10,0 | 7,5 | 6,0 | 6,0 | 2,5 | 4,0 | 4,0 | 1 |
| 0,50 | 11,0 | 7,5 | 5,5 | 5,5 | 3,5 | 5,5 | 5,5 | 1 |
| 0,50 | 11,0 | 8,5 | 7,0 | 6,5 | 2,5 | 4,0 | 4,5 | 1 |
| 0,50 | 11,0 | 8,0 | 6,0 | 6,5 | 3,0 | 5,0 | 4,5 | 1 |
| 0,50 | 11,0 | 8,0 | 6,0 | 6,0 | 3,0 | 5,0 | 5,0 | 1 |
| | | Reihenmittel $a_\varphi$ = | | | 2,50 | 3,87 | 4,56 | |

Wie früher bei der $\sigma$-Bestimmung wurden auch hier Beobachtungen mit $a$-Werten von der Größe 12 und darüber als zu ungenau ausgeschaltet. Die Mittelwertbildung für $a_\varphi$ ist mit Berücksichtigung von Gewichten ausgeführt, um der Verschiedenwertigkeit der einzelnen Beobachtungen Rechnung zu tragen, die dadurch hervorgerufen wird, daß den Sichtmessungen mit niederen $a$-Werten größere Genauigkeit zukommt als solchen mit höheren. Entsprechend den beobachteten $a_f$-Werten wurden die zugehörigen $a_\varphi$-Werte in 3 Gruppen eingeteilt mit den Gewichten 3, 2 oder 1. Die Durchprüfung jeder dieser nach steigenden $S_a$ geordneten Reihen ergab für die Differenz $a_\varphi$ der ohne und mit Fernrohr eingestellten $a$-Werte weder einen Gang noch irgendwelche anderen Gesetzmäßigkeiten für eine etwaige Abhängigkeit dieser Differenz von der Sicht $S_a$. Wenn dann weiter die für jede Reihe gemittelten $a_\varphi$-Werte nach steigenden Zielentfernungen geordnet wurden (Tab. VII), so konnte auch hier kein Gang festgestellt werden. Vielmehr gruppieren sich die

Tabelle VII.

| Zielentfernung km | $a_\varphi$ mit Fernglas 6fach | 8fach | 17fach | Gewicht |
|---|---|---|---|---|
| 1,3 | 2,57 | 3,73 | 4,85 | 37 |
| 1,7 | 2,76 | 3,99 | 4,54 | 39 |
| 1,7 | 2,45 | 3,55 | 3,99 | 38 |
| 2,05 | 2,50 | 3,87 | 4,56 | 23 |
| 2,1 | 2,40 | 3,42 | 4,30 | 51 |
| 2,35 | 2,69 | 3,92 | 4,62 | 13 |
| 12,3 | 2,85 | 3,82 | 4,38 | 20 |
| Gesamtmittel: | 2,56 | 3,71 | 4,43 | |
| Mittl. Fehler: | ± 0,06 | ± 0,07 | ± 0,11 | |

Reihenmittel für $a_\varphi$ regellos um die Gesamtmittelwerte, die wieder mit Berücksichtigung von Gewichten nach der Anzahl der Einzelwerte in den Reihen und deren durch die $a$-Größe gegebenen Gewicht berechnet wurden.

Aus den Gesamtmittelwerten für $a_\varphi$ der Tabelle VII ergeben sich dann mit den aus Tabelle IV zu entnehmenden Werten von $a_\beta$ für die Winkelgrößen, in denen normalgroße Ziele in den 3 Ferngläsern erscheinen, die Werte der Tabelle VIII für die Trübung der Fernglasoptik $a_{opt}$.

Tabelle VIII.

| | Fernglas 6fach | 8fach | 17fach |
|---|---|---|---|
| $a_\varphi$ | 2,55 | 3,7 | 4,45 |
| Winkelgröße des normalgroßen Ziels im Fernrohr | 7320" | 9760" | 20740" |
| $a_\beta$ | — 1,3 | — 1,35 | — 1,4 |
| $a_{opt} = a_\varphi - a_\beta$ | 3,85 | 5,05 | 5,85 |

Die Werte für $a_{opt}$ und auch für $a_\varphi$ wachsen mit der Vergrößerung des Fernrohres.

Das Ergebnis der Untersuchung über den Einfluß der Fernglasoptik auf die Sichtmessung ist eine additive Korrektion: Der für die Kombination Fernglas plus Sichtmesser abgelesene $a_f$-Wert wird korrigiert durch Addieren der Fernrohrtrübungskonstante $a_{opt}$. Dazu tritt dann noch additiv die Zielgrößenkorrektion $a_\beta$, gemäß

der Winkelgröße des Ziels im Fernrohr. Es ist also:

$$a_f + a_{opt} + a_\beta = a$$

der korrigierte $a$-Wert, den man bei gleicher Sicht und gleicher Zielentfernung mit dem Sichtmesser ohne Fernrohr an einem Ziel normaler Größe messen würde, wie es durchweg bei den Beobachtungen der Tab. VI—VIII geschehen ist. Ein Beispiel für die Prüfung der letzten Formel an Beobachtungen mit Zielen, die ohne Fernrohr kleiner als normal sind, zeigt Tab. V.

Was den Meßbereich einer Fernrohr-Sichtmesser-Kombination betrifft, so beschränkt die Größe $a_\beta$ diesen nach niederen $a$-Werten, d. h. wenn die Zielentfernung der Sichtweite nahekommt. Dem Werte $a = 0$ für den Sichtmesser ohne Fernrohr entspricht überhaupt kein $a_f$-Wert der Kombination. Erst wenn die Lufttrübung unterhalb eines gewissen Wertes liegt, nämlich wenn der Wert $a = a_{opt} + a_\beta$ überschritten wird, kann $a_f > 0$ und dadurch meßbar werden. Liegt $a$ unterhalb dieser Grenze, so ist das Objekt nur ohne Fernrohr beobachtbar, dagegen mit dem Sichtmesser plus Fernrohr überhaupt nicht zu erkennen.

Der größtmögliche $a_f$ Wert ergibt sich aus

$$a_m = a_f + a_{opt} + a_\beta$$

für das 17fach vergrößernde Theodolitfernrohr, wenn das Ziel ohne Fernrohr Normalgröße hat, zu:

$$a_f = 14{,}3 - 4{,}45 = 9{,}85.$$

In der Praxis der Vertikalsichtbeobachtung durch Verfolgung von Pilotballonen mit Theodolitfernrohr und Sichtmesser sind also an der $S_a$-Formel Korrektionen für Fernrohroptik und Zielgröße anzubringen, so daß die vollständige Formel zur Berechnung der Vertikalsicht folgendermaßen lautet:

$$S_a = l \cdot \left( \frac{1}{a_m - (a_f + a_{opt} + a_\beta)} - a \right).$$

### 5. Einfluß der Sehschärfe des Beobachters.

Daß Unterschiede der Sehschärfe des Auges bei verschiedenen Beobachtern die Sichtmessung beeinflussen müssen, liegt auf der Hand, da bei geringerer Sehschärfe naturgemäß die Erkennbarkeit der Gegenstände schlechter ist. Es wurde deshalb zur Ausschaltung dieses Einflusses in der Gebrauchsanweisung für den Sichtmesser vorgeschrieben, daß Fehlsichtigkeit des Auges durch Brille oder Fernglasokular auf normale Sehschärfe zu korrigieren sei.

Über die Größe dieses Einflusses lagen bisher nur Vermutungen vor. Wir haben nun durch Versuche festgestellt, wie sich die Einstellung des Sichtmessers ändert, wenn man die normale Sehschärfe des Auges durch Erzeugung von Fehlsichtigkeit mit vorgesetzten Linsen verringert. Dazu wurden bei diesigem Wetter Ziele im Gelände mit dem Sichtmesser anvisiert. Die Bestimmung der Sehschärfe mit vorgesetzten Linsen geschah nach dem üblichen Verfahren durch einen Augenarzt.

Tabelle IX enthält das Ergebnis dieser Versuche nach zahlreichen, gut miteinander übereinstimmenden Einzelmessungen.

Tabelle IX.

| Fehlsichtigkeit, erzeugt durch Linse von | Sehschärfe | $a$-Differenz des Sichtmessers ohne und mit Linse |
|---|---|---|
| — 0,5 Dioptr. | 5/5 | $< 0{,}5$ |
| 0 „ | 5/4 | 0 |
| + 0,5 „ | 5/5 | $< 0{,}5$ |
| + 0,5 „ | 5/5 | $< 0{,}5$ |
| + 1,1 „ | 5/10 — 5/8 | 1,0 |

Bei Abweichungen bis zu $\pm 0{,}5$ Dioptrien von der Normalsichtigkeit des Auges bleibt die Änderung der Sichtmessereinstellung unter der Grenze des Einstellungsfehlers, der für eine Einzelmessung auf $^1/_4\,a$-Stufe zu schätzen ist; dem entspricht eine Abnahme der Sehschärfe von 20 Proz. Übersteigt die Fehlsichtigkeit den Betrag von einer Dioptrie, entsprechend einer Herabsetzung der Sehschärfe auf die Hälfte des normalen Wertes, so wird ein um eine Einheit kleinerer $a$-Wert mit dem Sichtmesser eingestellt und die Sicht entsprechend zu klein gemessen.

Es ist also für übereinstimmende Sichtmessungen verschiedener Beobachter zu verlangen, daß die Verschiedenheit ihrer Sehschärfe nicht mehr als $^1/_2$ Dioptrie entspricht. Unternormale Sehschärfe bewirkt bei der Sichtmessung einen zu kleinen $a$-Wert, dessen Erniedrigung für eine durch eine Fehlsichtigkeit von 1 Dptr. auf $^1/_2$ herabgesetzte Sehschärfe eine $a$-Einheit beträgt. Übernormale Sehschärfe kommt nur selten mit Beträgen von mehr als 20 Proz. Steigerung über den Normalwert hinaus vor. Erst oberhalb dieses Betrages kann sich eine übernormale Sehschärfe bei der Sichtmessung merklich äußern, und zwar durch Vergrößerung des $a$-Wertes und damit scheinbarer Sichtvergrößerung. Solche Überschreitungen der normalen Sehschärfe wird man zweckmäßig durch eine für ein bestimmtes Auge leicht zu bestimmende Zahl korrigieren, die man bei allen Sichtmessungen von dem eingestellten $a$-Wert abzieht. Auch für unternormale Sehschärfe ist dies Verfahren gangbar, indem man eine entsprechende Korrektionszahl zu $a$ addiert; zweckmäßiger ist es aber hier, bei der Sichtmessung die unternormale Seh-

schärfe durch Brille oder Fernglasokular auf normale Sehschärfe zu korrigieren.

### 6. Zusammenfassung.

Zur Erhöhung der Genauigkeit der Sichtbestimmung mit dem Mattglas-Sichtmesser werden einige Einflüsse untersucht und die zu deren Ausschaltung geeigneten Korrektionen ermittelt.

a) Nach Versuchen bei Nebel, Dunst und klarer Luft mit weitgehender Variierung der Entfernung des Ziels wird die Formel zur Berechnung der Sicht so gestaltet, daß sich der mit verschieden entfernten Zielen gewonnene Sichtwert unabhängig von der Zielentfernung ergibt. Dieser Sichtwert ist unmittelbar das Maß der Sichtweite.

b) Da Verschiedenheiten der Größe der Ziele auf ihre Erkennbarkeit von Einfluß sind, wird für die Abweichungen der Zielgröße von einem als normal festgesetzten Betrage durch Versuche eine Korrektion bestimmt, deren Anbringung die Sichtmessung unabhängig von der Zielgröße macht.

c) Bei der Verwendung eines Fernglases zusammen mit dem Sichtmesser kommt zu der Sichtmessertrübung die Trübung der Fernglasoptik hinzu, deren Betrag für mehrere Ferngläser mit verschiedener Vergrößerung durch Versuche bestimmt wird, so daß sich mit ihrer Berücksichtigung und bei Anbringung der Zielgrößenkorrektion derselbe Sichtwert mit und ohne Fernglas ergibt.

d) Es wird durch Versuche festgestellt, wie sich Unterschiede der Sehschärfe des Auges verschiedener Beobachter bei der Sichtmessung äußern, und angegeben, wie dieser Einfluß, der sich erst bei größeren Abweichungen von der normalen Sehschärfe bemerkbar macht, auszuschalten ist.

Halle a. S., im April 1924.

(Eingegangen 7. April 1924.)

## Die Zerreißfestigkeit des Steinsalzes.

Von Hans Müller.

F. Zwicky[1]) hat die Reißfestigkeit des Steinsalzes entlang einer Hauptachse aus dem Bornschen Gitterpotential zu 20000 kg/cm² berechnet, während ihr Wert von Voigt und Sella[2]) zu 60 kg/cm² bestimmt wurde. Die Vermutung von Zwicky, daß der theoretische Wert nur im absoluten Nullpunkt erreicht wird, bei höherer Temperatur dagegen ein rasches Sinken der Reißfestigkeit auftritt, ist daher unwahrscheinlich, weil nach der Theorie im absoluten Nullpunkt die Verlängerung des Zugstabes vor dem Bruch 14 Proz. seiner ursprünglichen Länge sein müßte, während bei gewöhnlicher Temperatur diese Verlängerung nur 0.015 Proz. beträgt. Außerdem ergaben einige Messungen in flüssigem Sauerstoff nur eine Erhöhung der Reißfestigkeit um höchstens 90 Proz.

Die vorliegende Mitteilung möchte auf einige Tatsachen hinweisen, die vielleicht eine andere Erklärung der Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment ermöglichen.

Mit einer Versuchsanordnung, analog wie sie von Voigt und Sella beschrieben ist, wurden Steinsalzstäbchen mit Schellack in Messingfassungen gekittet und auf genau zentralen Zug beansprucht. Die Belastung wurde stetig (durch zufließendes Wasser) bis zum Bruch erhöht. Die Kristallstäbchen waren aus klaren Kristallen gespalten und 3—4 cm lang. Die Begrenzungsflächen der Stäbchen waren somit natürliche, unpolierte 001 Spaltflächen. Die Zerreißproben liefern einen relativ gut reproduzierbaren Wert der Reißfestigkeit. Schließt man die wenigen Resultate aus, die infolge Materialfehler einen bedeutend zu kleinen Wert ergaben, so weichen die einzelnen Resultate um weniger als 5 Proz. voneinander ab. Als Reißfestigkeit wurde immer der maximale Wert einer Versuchsreihe genommen, weil alle Versuchsfehler die Reißfestigkeit kleiner erscheinen lassen.

Die Messungen bestätigen den von Voigt und Sella angegebenen Wert, zeigen aber eine ausgesprochene und merkwürdige Abhängigkeit der Reißfestigkeit von der Größe des Stabquerschnittes, wie die folgende Tabelle zeigt:

| Querschnitt mm×mm | Bruchlast $P$ kg | Reißfestigkeit $R$ kg/cm² |
|---|---|---|
| 6,0×6,0 | 14,4 | 40 |
| 4,0×4,0 | 6,60 | 42 |
| 3,0×3,0 | 4,20 | 47 |
| 2,5×2,5 | 3,45 | 56 |
| 2,0×2,0 | 2,90 | 72 |
| 1,5×1,5 | 2,01 | 89 |

Die Messungen von Voigt und Sella, die mit Stäbchen vom Querschnitt 2,2×2,2 mm² arbeiteten und $R = 57$ kg/cm² fanden, und von Antonoff[1]), der bei Stäben von 16 mm² Querschnitt $R = 42$ kg/cm² konstatierte, passen sehr gut in diese Tabelle.

Es wurde versucht, die Tabelle noch für kleinere Querschnitte fortzusetzen. Da es infolge der Plastizität dünner Steinsalzstäbchen

1) F. Zwicky, Physik. Zeitschr. **24**, 131, 1923.
2) Voigt u. Sella, Ann. d. Phys. **48**, 53, 1867.

1) Antonoff, Zeitschr. f. phys. Chem. **102**, 377, 1923.

nicht gelingt, sie beliebig dünn zu spalten, wurde so verfahren: Man brachte die eingekitteten Stäbchen im Zerreißapparat in Wasser, bis sie sich bis auf einen dünnen Faden gelöst hatten, trocknete dann das Stäbchen und machte den Zerreißversuch. Da beim Auflösen die Querschnittsform nicht mehr regulär bleibt, so konnte der Wert nur bis 10 Proz. genau ermittelt werden. Die folgende Tabelle gibt die Mindestwerte der Reißfestigkeit dieser dünnen Stäbchen:

| Querschnitt mm | $P$ in kg | $K$ in kg cm$^2$ |
|---|---|---|
| 1,0 × 1,0 | 2,0 | 200 |
| 0,7 × 0,7 | 1,7 | 350 |
| 0,5 × 0,5 | 1,5 | 600 |

Im ganzen Bereich der Tabelle ist die Reißfestigkeit auf den 15fachen Wert gestiegen. Dieses starke Anwachsen mit abnehmendem Querschnitt führt uns auf die Frage der Existenz einer Oberflächenfestigkeit, die schon von Voigt und Sella aus der Abhängigkeit der Reißfestigkeit von der Orientierung des Querschnittes bezüglich der Kristallachsen postuliert wurde. Tatsächlich lassen sich die vorliegenden Resultate ziemlich gut in eine Formel bringen:

$$P = o_1 q + o_2 u \quad (q = \text{Querschnitt}, \; u = \text{Umfang}).$$

Zugunsten einer Oberflächenfestigkeit spricht auch die Tatsache, daß Polieren, Schleifen und Ätzen der Oberfläche die Reißfestigkeit bis um 40 Proz. erhöhen kann.

Andrerseits ist es unwahrscheinlich, daß die Oberflächenschicht, die ja nach dem Gittermodell höchstens die Dicke von $10^{-7}$ cm hat, schon bei Stäbchen von 1 mm$^2$ Querschnitt einen so erheblichen Einfluß ausübt, wie das von den Experimenten nahegelegt wird.

Nach den Versuchen von Griffith[1], der an Glas und Quarz ganz ähnliche Resultate gefunden hat, scheint es vielmehr, daß es eine allgemeine Eigenschaft der festen Materie ist, in dünnen Fäden eine viel größere Festigkeit als gewöhnlich zu zeigen. Der innere Grund, den Griffith darin sucht, daß dickere Stäbchen eher Unregelmäßigkeiten im inneren Aufbau zeigen als dünne, ist bei Steinsalzstäbchen, die aus dem gleichen Kristall gespalten sind, nicht gut haltbar.

Man kann höchstens Smekal[2] beistimmen, wenn er sagt, daß man zwischen einer „molekularen", und einer „technischen" Festigkeit unterscheiden muß. Dabei versteht man unter der molekularen Festigkeit diejenige, die der Körper zeigen würde, wenn er ideal aufgebaut wäre, und die er unter Umständen, z. B. als dünner Faden auch erreichen kann. Wenn die Extrapolation unserer experimentell ermittelten Zahlen erlaubt ist, so müßten schon Steinsalzstäbchen von 0,1 mm Dicke den von Zwicky berechneten Wert der molekularen Reißfestigkeit zeigen.

Warum aber die technische Festigkeit, d. h. die Festigkeit, die man gewöhnlich konstatiert, einige hundertmal kleiner ist als der theoretische Wert, bleibt vorläufig unerklärt.

1) Griffith, Phil. Transactions 1921, S. 163.
2) Smekal, Naturwissenschaften 1922, S. 799.

Zürich, Physik. Inst. d. Eidg. Techn. Hochschule, 1. März 1924.

(Eingegangen 10. März 1924.)

# BESPRECHUNGEN.

**S. Valentiner, Vektoranalysis.** (Sammlung Göschen.) kl. 8°. 132 S. mit 13 Figuren. 3. umgearbeitete Auflage. Berlin u. Leipzig, W. de Gruyter & Co., 1923.

Das Bandchen behandelt die Grundlehren der Vektoralgebra und Vektoranalysis in Anlehnung an einfache geometrische und physikalische Beispiele. Weitergehende physikalische Anwendungen auf Potentialtheorie, Hydrodynamik und Elektrizitätslehre (darin ein Abschnitt über Weltvektoren) folgen im II. Teil. Der letzte Teil ist der Dyadenrechnung und ihren Anwendungen (z. B. auf kontinuierlich verteilte Massen) gewidmet.

Die dritte Auflage ist im Vergleich zur vorhergehenden etwas kürzer ausgefallen, indem die Darstellung an einigen Stellen etwas knapper gefaßt ist und einige weniger wichtige Beispiele weggefallen sind. Leider ist die Zusammenstellung der wichtigsten Formeln, die die zweite Auflage am Ende gab, weggeblieben.

F. Hund.

## Personalien.

**(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)**

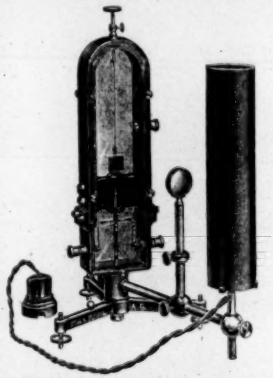
**Ernannt:** Der ord. Professor für Starkstromtechnik an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Anton Schwaiger in gleicher Eigenschaft an der Technischen Hochschule München, der a. o. Professor an der deutschen Universität Prag Dr. Heinrich Rausch v. Traubenberg zum ord. Professor der Experimentalphysik ebenda.

**Berufen:** Der Privatdozent an der Universität Berlin und wissenschaftliches Mitglied des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Chemie in Berlin-Dahlem Professor Dr. Otto Hahn zum ord. Professor der physikalischen Chemie an der Technischen Hochschule Hannover.

**Gestorben:** Der Professor der Chemie an der Temple Universität Philadelphia Dr. Merritt R. Grose, der Dozent für Mathematik an der Chinesisch-Deutschen Technischen Hochschule in Voosung Professor Paown Ku, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Halle Geh. Regierungsrat Dr. August Gutzmer, der Begründer und Verleger der Physikalischen Zeitschrift Dr. med. und Dr. Ing. Georg Hirzel.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

# Max Kohl A.G. Chemnitz



61392. Drehspul-Spiegelgalvanometer.

**Physikalische Apparate**

**Funken-Induktoren**

**Ölluftpumpen**

**Experimentier-Schalttafeln**

**Projektions-Apparate**

**Laboratorienmöbel**

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel: 4 Grosse Preise; Turin: 2 Grosse Preise; Dresden: Grosser Preis.

**Prismen, Linsen, Platten**
aus
**Kalkspat, Flußspat, Quarz, Steinsalz, Glas.**
**Gyps- und Glimmerpräparate.**

*Preisliste gratis.*

**B. Halle Nachfolger,** Optisches Institut.
Berlin-Steglitz.


## Eingegangene Bücher.

(Eingehende Besprechung vorbehalten. Rücksendung nicht besprochener Bücher erfolgt in keinem Falle.)

**Russ, Fr.**, Die Elektrostrahlöfen. 8°. VIII u. 471 S. m. 439 Abb. i. Text u. 64 Zahlentafeln. München-Berlin, R. Oldenbourg. 1924. Geh. M. 14.—, geb. M. 15.50.

**Ryd, V. H.**, Meteorological Problems (Publikationer fra det Danske Meteorologiske Institut Meddeleser No. 5.) 8°. 124 S. Kjobenhavn, G. E. C. Gad. 1923.

**Schneider, E.**, Mathem. Schwingungen. 8°. VI u. 194 S. m. 49 Textabb. Berlin, Julius Springer. 1924. Geh. M. 8.40, geb. M. 9.15.

**Schoklitsch, A.**, Graphische Hydraulik. (Sammlg. Mathem.-Physik. Lehrb 21.) kl. 8°. IV u. 72 S. m. 45 Fig. i. Text u. auf 2 Tafeln. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner. 1923. Kart. M. 2.60.

**Schweikert, G.**, Innere Ballistik. 8°. 106 S. Leipzig, Johann Ambrosius Barth. 1923. Gz. geh. M. 9.—.


**G. E. Stechert & Co. in Leipzig,** Hospitalstr. 10

kaufen stets gegen Bezahlung in **Dollars**

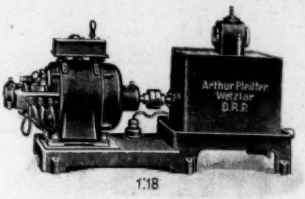
**Wissenschaftliche Zeitschriften** in vollständigen Reihen

z. B.

**Annalen der Physik — Annalen der Chemie — Mathematische Annalen — Journal für praktische Chemie — Monatshefte für Chemie — Physikalische Zeitschrift — Zeitschrift für physikalische Chemie — Meteorologische Zeitschrift — Zeitschrift für Mathematik usw.**

***Angebote mit Preisangabe erbeten.***

**Pfeiffer's**



1:18

Rotierende Öl-Luftpumpe D.R.P.

**Quecksilber-Dampfstrahlpumpe**
ganz aus Stahl D. R. P. angem.

1:20

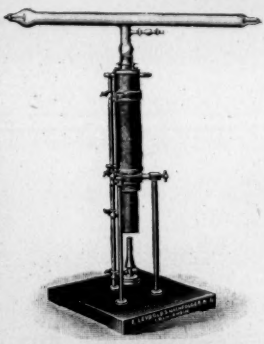
**15 Liter** bis zum Aussetzen jeder Entladung in **10 Sek.** vom Vorvakuum ab.
*Listen von Abt. H anfordern.*

Vgl. Techn. Physik, 1922, Heft 12. Phys. Ztschr. 1922, pag. 463.

**Hochvakuum-Pumpen,** Vakua bis $^1/_{1\,000\,000}$ mm Hg.
Saugleistung bis 50 cbm per Stunde
**Photometer** aller Systeme
**Öl-Prüfapparate, Schnellviskosimeter usw.**
**Funken-Induktoren** bis 1000 mm Funkenlänge
**Doppel-Pendelgleichrichter**
**Oscillographen**

# Arthur Pfeiffer
## Wetzlar 8
Telegr. Vakupfeif. — Tel. 85 u. 86.

# Neue Hochvakuum-Diffusions-Pumpe aus Metall
## nach Prof. Gaede
D.R.P. und Auslandspatente angemeldet


$^1/_{10}$ nat. Gr.

**Saugleistung: 15 Liter per Sek.**
**Vorvakuum: 20 mm**
„Vergl. Zeitschrift für Technische Physik, Jahrg. 1923, Nr. 10"

Alleinige Hersteller

# E. Leybold's Nachfolger A.-G.
**Köln a/Rhein, Brüderstr. 7**

Sonderliste auf Wunsch


Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.